Exercice 1

6 points

1) Le volume du parallélépipède rectangle est le produit de ses trois dimensions :

$$x \times 2x \times y = 576 \iff 2x^2y = 576 \iff \boxed{y = \frac{288}{x^2}} \quad (x \neq 0).$$

2) Le parallélépipède a six faces, égales deux à deux : deux faces de dimensions $x \times 2x$, deux faces de dimensions $x \times y$ et deux faces de dimensions $2x \times y$. Donc

$$\mathscr{A}(x) = 2\left(2x^2 + xy + 2xy\right) = 4x^2 + 6xy = 4x^2 + 6x \times \frac{288}{x^2},$$

soit, pour $3 \leqslant x \leqslant 12$:

$$\boxed{\mathscr{A}(x) = 4x^2 + \frac{1728}{x}}.$$

3) La fonction $\mathscr{A}$ est dérivable sur $[3\,;\,12]$ (somme d'un polynôme et d'une fonction inverse, $x \neq 0$) et

$$\mathscr{A}'(x) = 8x - \frac{1728}{x^2} = \frac{8x^3 - 1728}{x^2} = \frac{8\left(x^3 - 216\right)}{x^2}.$$

Comme $x^2 > 0$, $\mathscr{A}'(x)$ a le signe de $x^3 - 216 = x^3 - 6^3$.
La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $x^3 - 216 < 0 \iff x < 6$ et $x^3 - 216 > 0 \iff x > 6$.
(On peut aussi factoriser : $x^3 - 216 = (x-6)(x^2+6x+36)$, avec $x^2 + 6x + 36 > 0$ car son discriminant vaut $-108 < 0$.)

x	3		6		12
$\mathscr{A}'(x)$		$-$	0	$+$	
$\mathscr{A}$	612	↘	432	↗	720

$\mathscr{A}(6) = 4 \times 36 + \dfrac{1728}{6} = 144 + 288 = 432$; $\mathscr{A}(3) = 36 + 576 = 612$; $\mathscr{A}(12) = 576 + 144 = 720$.
La fonction $\mathscr{A}$ est décroissante sur $[3\,;\,6]$ puis croissante sur $[6\,;\,12]$: elle admet un minimum en 6.
L'aire totale est minimale pour $\boxed{x = 6 \text{ mm}}$, et cette aire minimale vaut $\boxed{\mathscr{A}(6) = 432 \text{ mm}^2}$.
Le solide mesure alors 6 mm $\times$ 12 mm $\times$ 8 mm (car $y = \dfrac{288}{36} = 8$).

Exercice 2

3 points

1) On suppose $P(k)$ vraie : il existe un entier m tel que $4^k + 1 = 3m$, c'est-à-dire $4^k = 3m - 1$.
Alors

$$\begin{aligned} 4^{k+1} + 1 &= 4 \times 4^k + 1 \\ &= 4(3m - 1) + 1 \\ &= 12m - 3 \\ &= 3(4m - 1). \end{aligned}$$

Comme $4m - 1$ est un entier, $4^{k+1} + 1$ est un multiple de 3 : $\boxed{P(k+1) \text{ est vraie}}$. La propriété est héréditaire.

2) Pour $n = 0$: $4^0 + 1 = 1 + 1 = 2$, qui n'est pas un multiple de 3. Donc $P(0)$ est fausse.
La proposition n'est donc $\boxed{\text{pas vraie pour tout entier naturel } n}$: l'hérédité seule ne suffit pas, il manque l'initialisation.
Remarque. On a de même $4^1 + 1 = 5$, $4^2 + 1 = 17$, $4^3 + 1 = 65$: aucun n'est multiple de 3. En fait, $4^n - 1$ est un multiple de 3 pour tout n (récurrence analogue, initialisée par $4^0 - 1 = 0$), donc $4^n + 1 = (4^n - 1) + 2$ n'est jamais un multiple de 3.

Exercice 3

4 points

1) Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(1 - \frac{2}{n+4}\right) - \left(1 - \frac{2}{n+3}\right) = \frac{2}{n+3} - \frac{2}{n+4} \\ &= \frac{2(n+4) - 2(n+3)}{(n+3)(n+4)} = \frac{2}{(n+3)(n+4)}. \end{aligned}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, $(n+3)(n+4) > 0$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$: la suite (u_n) est $\boxed{\text{strictement croissante}}$.
Autre méthode. $u_n = f(n)$ avec $f(x) = 1 - \dfrac{2}{x+3}$ sur $[0\,;+\infty[$. $f'(x) = \dfrac{2}{(x+3)^2} > 0$, donc f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ et la suite (u_n) aussi.

2) Pour tout entier naturel n :

$$t_{n+1} - t_n = -\frac{n}{n+1}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 0$ et $n + 1 > 0$, donc $-\dfrac{n}{n+1} \leqslant 0$, d'où $t_{n+1} \leqslant t_n$.
La suite (t_n) est $\boxed{\text{décroissante}}$.
Précision : pour $n = 0$, la différence est nulle ($t_1 = t_0 = 5$) ; pour $n \geqslant 1$, $-\dfrac{n}{n+1} < 0$, donc la suite est strictement décroissante à partir du rang 1 ($t_2 = \dfrac{9}{2}$, $t_3 = \dfrac{23}{6}$, ...).

Exercice 4

7 points

1) **a.** $u_1 = \dfrac{2}{5} \times 8 + 3 = \dfrac{16}{5} + \dfrac{15}{5} = \boxed{\dfrac{31}{5} = 6{,}2}$.

$u_2 = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{31}{5} + 3 = \dfrac{62}{25} + \dfrac{75}{25} = \boxed{\dfrac{137}{25} = 5{,}48}$.

$u_3 = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{137}{25} + 3 = \dfrac{274}{125} + \dfrac{375}{125} = \boxed{\dfrac{649}{125} = 5{,}192}$.

b. On a $u_0 > u_1 > u_2 > u_3$: on conjecture que la suite (u_n) est $\boxed{\text{décroissante}}$.

2) Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant 5$ ».
Initialisation. $u_0 = 8$ et $u_1 = 6{,}2$: on a bien $8 \geqslant 6{,}2 \geqslant 5$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit k un entier naturel tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Alors

$$\begin{aligned} u_k \geqslant u_{k+1} \geqslant 5 &\iff \frac{2}{5}u_k \geqslant \frac{2}{5}u_{k+1} \geqslant \frac{2}{5} \times 5 && \text{(on multiplie par } \tfrac{2}{5} > 0) \\ &\iff \frac{2}{5}u_k + 3 \geqslant \frac{2}{5}u_{k+1} + 3 \geqslant 2 + 3 && \text{(on ajoute } 3) \\ &\iff u_{k+1} \geqslant u_{k+2} \geqslant 5. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Conclusion. Par récurrence, pour tout entier naturel n, $\boxed{u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant 5}$.
En particulier $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout n : la suite (u_n) est décroissante, $\boxed{\text{la conjecture est vérifiée}}$ (et la suite est minorée par 5).

3) **a.** Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 5 = \frac{2}{5}u_n + 3 - 5 = \frac{2}{5}u_n - 2 = \frac{2}{5}(u_n - 5) = \frac{2}{5}v_n.$$

La suite (v_n) est donc $\boxed{\text{géométrique de raison } \dfrac{2}{5}}$, de premier terme $v_0 = u_0 - 5 = 8 - 5 = 3$.

b. Pour tout entier naturel n : $\boxed{v_n = 3 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^n}$.

c. Comme $u_n = v_n + 5$, pour tout entier naturel n : $\boxed{u_n = 5 + 3 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^n}$.

(Contrôle : $n = 1$ donne $5 + \dfrac{6}{5} = \dfrac{31}{5}$, conforme à la question 1.)

$u_{100} = 5 + 3 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^{100}$. Or $3 \times 0{,}4^{100} \approx 4{,}8 \times 10^{-40}$, si bien que la calculatrice affiche 5 :

$$\boxed{u_{100} = 5 + 3 \times 0{,}4^{100} \approx 5}.$$

Le terme u_{100} est très légèrement supérieur à 5 (la différence est invisible à l'affichage).