Calculatrice autorisée

On prendra soin de rédiger rigoureusement toutes les réponses.

Exercice 1

6 points

Un laboratoire pharmaceutique fabrique un produit solide conditionné sous la forme d'un petit parallélépipède rectangle dont le volume est 576 mm^3.

On note y la hauteur de ce parallélépipède (en millimètres) et x et $2x$ ses deux autres dimensions (en millimètres), avec $3 \leqslant x \leqslant 12$.

1) Exprimer y en fonction de x.

2) Exprimer, pour $3 \leqslant x \leqslant 12$, l'aire totale $\mathscr{A}(x)$, en mm^2, de ce parallélépipède rectangle en fonction de x.

3) Pour quelle valeur de x l'aire totale de ce solide, $\mathscr{A}(x)$, est-elle minimale ? On justifiera avec soin la réponse.
Quelle est alors l'aire trouvée ?

Exercice 2

3 points

Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ la proposition : « $4^n + 1$ est un multiple de 3 ».

1) On suppose la proposition $P(k)$ vraie pour un nombre entier naturel k quelconque et fixé.
Démontrer qu'alors la proposition $P(k+1)$ est vraie.

2) La proposition $P(n)$: « $4^n + 1$ est un multiple de 3 » est-elle vraie pour tout entier naturel n ?
Justifier la réponse.

Exercice 3

4 points

1) La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 1 - \dfrac{2}{n+3}$.
Étudier le sens de variation de cette suite en utilisant la méthode de son choix.

2) La suite (t_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $t_{n+1} = t_n - \dfrac{n}{n+1}$ et $t_0 = 5$.
Étudier le sens de variation de cette suite.

Exercice 4

7 points

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3$.

1) **a.** Calculer u_1, u_2 et u_3.

b. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

2) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant 5$. La conjecture est-elle vérifiée ?

3) Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 5$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

b. En déduire une expression de v_n en fonction de n.

c. Déterminer une expression de u_n en fonction de n, puis calculer u_{100}.