Exercice 1

4 points

1) Pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = u_{n-1}^2 + (n-1)$ avec $u_{n-1}^2 \geqslant 0$, donc $u_n \geqslant n-1$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-1) = +\infty$, le théorème de comparaison donne $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
(Premiers termes : $u_1 = 4$, $u_2 = 17$, $u_3 = 291$.) L'affirmation 1 est fausse.

2) Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$, donc on peut diviser numérateur et dénominateur par e^x :

$$\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + x} = \frac{1}{1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}}.$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$. Par somme puis quotient :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + x} = \frac{1}{1+0} = 1 \neq 0.$$ L'affirmation 2 est fausse.

3) Le trinôme $-2x^2 + x + 1$ a pour racines 1 (racine évidente) et $-\dfrac{1}{2}$ (produit des racines $\dfrac{c}{a} = -\dfrac{1}{2}$), d'où

$$-2x^2 + x + 1 = -2\left(x + \tfrac{1}{2}\right)(x-1) = (2x+1)(1-x).$$

Quand $x \to -\dfrac{1}{2}$ avec $x < -\dfrac{1}{2}$: $2x+1 \to 0$ avec $2x+1 < 0$, et $1 - x \to \dfrac{3}{2} > 0$.
Donc le dénominateur tend vers 0 en restant négatif : $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{2}\\ x<-\frac{1}{2}}} \left(-2x^2 + x + 1\right) = 0^-$.

Le numérateur vaut $-2 < 0$; par quotient :

$$\lim_{\substack{x\to-\frac{1}{2}\\ x<-\frac{1}{2}}} \frac{-2}{-2x^2 + x + 1} = +\infty.$$ L'affirmation 3 est vraie.

Exercice 2

2,5 points

1) $f = u \times v$ avec $u(x) = 4x - 2$, $u'(x) = 4$, $v(x) = \mathrm{e}^{-x+1}$, $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x+1}$. Pour tout $x \geqslant 0$:

$$f'(x) = 4\mathrm{e}^{-x+1} - (4x-2)\mathrm{e}^{-x+1} = (6 - 4x)\,\mathrm{e}^{-x+1}.$$

Comme $\mathrm{e}^{-x+1} > 0$, $f'(x)$ a le signe de $6 - 4x$, qui s'annule en $x = \dfrac{3}{2}$, positif avant, négatif après.

Valeurs : $f(0) = -2\mathrm{e} \approx -5{,}44$; $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \approx 2{,}43$.

Limite en $+\infty$: $f(x) = \mathrm{e} \times (4x\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e} \times \left(\dfrac{4x}{\mathrm{e}^x} - \dfrac{2}{\mathrm{e}^x}\right)$. Par croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\mathrm{e}^x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-2\mathrm{e}$	↗	$4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$	↘	0

2) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$:

$$\boxed{\text{la droite d'équation } y = 0 \text{ est asymptote horizontale à } \mathscr{C}_f \text{ en } +\infty}.$$

f est dérivable, donc continue, sur $[0\,;+\infty[$: elle ne tend vers l'infini en aucun point, il n'y a pas d'asymptote verticale.

Exercice 3

3,5 points

Dans le cube $ABCDEFGH$ (faces carrées opposées parallèles), on a les égalités de vecteurs :

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}, \qquad \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}, \qquad \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AB} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{CB}.$$

1) On décompose chaque vecteur à l'aide de la relation de Chasles :

- $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CG}$;
- $\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$;
- $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CG}$.

Alors :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CM} &= \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HM} = \overrightarrow{CH} + 3\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CE}\\ &= \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CG}\right) + 3\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}\right) + \overrightarrow{BA} + \left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CG}\right)\\ &= 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CG} + 4\overrightarrow{CB}\\ &= 3\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}\right) + 2\overrightarrow{CG} + 4\overrightarrow{CB} = \vec{0} + 2\overrightarrow{CG} + 4\overrightarrow{CB},\end{aligned}$$

soit $\boxed{\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{CG} + 4\overrightarrow{CB}}$.

Vérification dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$: $H(0\,;1\,;1)$, $\overrightarrow{HF}(1\,;-1\,;0)$, $\overrightarrow{BA}(-1\,;0\,;0)$, $\overrightarrow{CE}(-1\,;-1\,;1)$, donc $\overrightarrow{HM}(1\,;-4\,;1)$, $M(1\,;-3\,;2)$ et $\overrightarrow{CM}(0\,;-4\,;2)$; or $2\overrightarrow{CG} + 4\overrightarrow{CB} = 2(0\,;0\,;1) + 4(0\,;-1\,;0) = (0\,;-4\,;2)$.

2) $\overrightarrow{CM}$ s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{CB}$, qui ne sont pas colinéaires. Donc M appartient au plan passant par C et dirigé par $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{CB}$, c'est-à-dire le plan (BCG) :

$$\boxed{\text{les points } M,\ C,\ G \text{ et } B \text{ sont coplanaires}}$$

(M est dans le plan de la face $BCGF$, mais hors de la face elle-même).

Exercice 4

4 points

- **Asymptote verticale.** Le terme $\dfrac{d}{x+1}$ est défini en 1 ; pour que la droite d'équation $x = 1$ soit asymptote verticale, il faut que le dénominateur $x - c$ s'annule en 1 : $\boxed{c = 1}$.
- **Limite en $+\infty$.** Pour $x > 1$, $\dfrac{ax+b}{x-1} = \dfrac{x\left(a + \frac{b}{x}\right)}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \dfrac{a + \frac{b}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} a$, et $\dfrac{d}{x+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
  Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$, et la condition donne $\boxed{a = 2}$.
- **Valeur en 0.** $f(0) = \dfrac{b}{0-1} + \dfrac{d}{1} = -b + d$. La condition $f(0) = 0$ donne $\boxed{d = b}$.
- **Tangente.** Pour $x \neq \pm 1$, avec $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$:

$$f'(x) = \frac{2(x-1) - (2x+b)}{(x-1)^2} - \frac{d}{(x+1)^2} = \frac{-2-b}{(x-1)^2} - \frac{b}{(x+1)^2}.$$

  Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 2 est $f'(2)$:

$$f'(2) = \frac{-2-b}{1} - \frac{b}{9} = -2 - \frac{10b}{9}.$$

$$f'(2) = -1 \iff -2 - \frac{10b}{9} = -1 \iff -\frac{10b}{9} = 1 \iff b = -\frac{9}{10}, \quad \text{donc} \quad b = d = -0{,}9.$$

Conclusion : pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\,;1\}$,

$$\boxed{f(x) = \frac{2x - 0{,}9}{x-1} - \frac{0{,}9}{x+1}}.$$

Vérification : $f(0) = 0{,}9 - 0{,}9 = 0$; en 1, le numérateur $2x - 0{,}9$ vaut $1{,}1 \neq 0$ et le dénominateur s'annule, donc f a bien une limite infinie en 1 : la droite $x = 1$ est bien asymptote verticale.

Exercice 5

6 points

1) $u_1 = \dfrac{1}{2} \times 3 + \dfrac{1}{2} \times 0 + 1 = \boxed{\dfrac{5}{2}}$ et $u_2 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{2} \times 1 + 1 = \dfrac{5}{4} + \dfrac{2}{4} + \dfrac{4}{4} = \boxed{\dfrac{11}{4}}$.

2) **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1 - n - 1 = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(u_n - n) = \frac{1}{2}v_n.$$

Donc $\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } \dfrac{1}{2}}$, de premier terme $\boxed{v_0 = u_0 - 0 = 3}$.

b. D'après a., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Comme $v_n = u_n - n$, on a $u_n = v_n + n$, soit $\boxed{u_n = 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + n}$.

c. $0 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$. Par somme, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

3) Pour tout $n \geqslant 1$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ ».

Initialisation. $\sum\limits_{k=1}^{1} k = 1$ et $\frac{1\times 2}{2} = 1$: $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geqslant 1$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

ce qui est $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion. Par récurrence, pour tout $n \geqslant 1$, $\boxed{\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$.

4) **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(3\left(\frac{1}{2}\right)^k + k\right) = 3\sum\limits_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k + \sum\limits_{k=0}^{n} k$.

- Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2} \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

- Le terme $k = 0$ est nul, donc d'après la question 3) (égalité encore vraie pour $n = 0$) :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Donc

$$\boxed{S_n = 6\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n+1)}{2}}.$$

Contrôle : $S_0 = 6\times\frac{1}{2} + 0 = 3 = u_0$; $S_1 = 6\times\frac{3}{4} + 1 = \frac{11}{2} = 3 + \frac{5}{2}$.

b. Pour tout $n \geqslant 1$:

$$w_n = \frac{S_n}{n^2} = \frac{6\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{6\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, donc le premier terme tend vers 0 ; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc le second tend vers $\frac{1}{2}$.

Par somme, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \frac{1}{2}}$.