Calculatrice autorisée (mode examen)
Toutes les réponses doivent être justifiées et clairement rédigées.

Exercice 1

4 points

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier soigneusement.

1) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n^2 + n$.
Affirmation 1 : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2) **Affirmation 2 :** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + x} = 0$.

3) **Affirmation 3 :** $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{2}\\ x<-\frac{1}{2}}} \dfrac{-2}{-2x^2+x+1} = +\infty$.

Exercice 2

2,5 points

Dans cet exercice, on considère la fonction f, définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = (4x-2)\mathrm{e}^{-x+1}$.

1) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$ (en incluant les bornes).
2) La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle des asymptotes ? Si oui, préciser leurs équations.

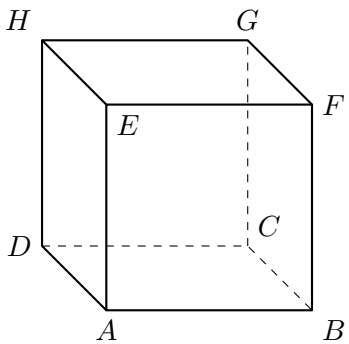
Exercice 3

3,5 points

On considère un cube $ABCDEFGH$ et on définit le point M par

$$\overrightarrow{HM} = 3\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CE}.$$

1) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{CM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{CB}$.
2) Conclure quant aux points M, C, G et B.



Exercice 4

4 points

Soient a, b, c et d des nombres réels.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\,;1\}$ par $f(x) = \dfrac{ax+b}{x-c} + \dfrac{d}{x+1}$, telle que :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$;
- $f(0) = 0$;
- la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f admet pour asymptote verticale la droite d'équation $x = 1$;
- la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 a pour coefficient directeur -1.

Déterminer l'expression de $f(x)$.

Exercice 5

6 points

La suite (u_n) est définie par son premier terme $u_0 = 3$ et par la relation $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{2}n + 1$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Déterminer u_1 et u_2.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - n$.

a. Établir que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.

b. Exprimer v_n en fonction de n, puis vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + n$.

c. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

3) Établir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note S_n la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (u_n) :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

a. Établir une expression de S_n ne dépendant que de n.

b. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $w_n = \dfrac{S_n}{n^2}$. Déterminer la limite de (w_n).