Exercice 1

2,5 points

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $u_n \geqslant 2^n + n$ ».

Initialisation. $u_0 = 1$ et $2^0 + 0 = 1$; on a bien $u_0 \geqslant 2^0 + 0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n \geqslant 2^n + n$. Alors :

$$\begin{aligned} u_n \geqslant 2^n + n &\iff 2u_n \geqslant 2^{n+1} + 2n && \text{(on multiplie par } 2 > 0) \\ &\iff 2u_n - n + 3 \geqslant 2^{n+1} + n + 3 && \text{(on ajoute } -n+3) \\ &\iff u_{n+1} \geqslant 2^{n+1} + n + 3 \\ &\implies u_{n+1} \geqslant 2^{n+1} + (n+1) && \text{(car } n+3 \geqslant n+1). \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire ; d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n \geqslant 2^n + n}$.

2) $2 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$; de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} (2^n + n) = +\infty$.

Comme $u_n \geqslant 2^n + n$ pour tout n, le théorème de comparaison donne $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

Exercice 2

4,5 points

1) **a.** $f = \dfrac{p}{q}$ avec $p(x) = \mathrm{e}^x$, $p'(x) = \mathrm{e}^x$, $q(x) = x + 2$, $q'(x) = 1$ (q ne s'annule pas sur $[0\,;1]$). Pour tout $x \in [0\,;1]$:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(x+2) - \mathrm{e}^x \times 1}{(x+2)^2} = \frac{(x+1)\,\mathrm{e}^x}{(x+2)^2}.$$

Sur $[0\,;1]$: $x + 1 \geqslant 1 > 0$, $\mathrm{e}^x > 0$ et $(x+2)^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$:

$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [0\,;1]}$.

$f(0) = \dfrac{\mathrm{e}^0}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $f(1) = \dfrac{\mathrm{e}}{3} \approx 0{,}906$.

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
f	$\frac{1}{2}$	↗	$\frac{\mathrm{e}}{3}$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$ ».

Initialisation. $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_1 = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\mathrm{e}^{0,5}}{2,5} \approx 0{,}660$. On a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$. Les nombres 0, u_n, u_{n+1}, 1 sont dans $[0\,;1]$, où f est croissante, donc l'ordre est conservé :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1 &\implies f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(1) \quad (f \text{ croissante sur } [0\,;1]) \\ &\implies \frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{3}. \end{aligned}$$

Or $0 \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{\mathrm{e}}{3} \leqslant 1$ (car $\mathrm{e} \leqslant 3$), donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$: $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1}$.

c. D'après b., la suite (u_n) est croissante ($u_n \leqslant u_{n+1}$) et majorée par 1. D'après le théorème de convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ (vers une limite $\ell \leqslant 1$).

2) a. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $v_n \leqslant 1$; la fonction exponentielle étant croissante sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{v_n} \leqslant \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$. En divisant par $n+2 > 0$:

$$\boxed{v_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{v_n}}{n+2} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+2}}.$$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+2}$ (la minoration vient de $0 \leqslant v_n$ admis pour tout rang).

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+2) = +\infty$, donc par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}}{n+2} = 0$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = 0$, c'est-à-dire $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0}$.

Exercice 3

3,5 points

1) Pour $n \geqslant 1$, on factorise par n^2 : $u_n = \dfrac{n^2\left(3 - \frac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(2 + \frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{3 - \frac{5}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$, par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{3}{2}$. Réponse a)

2) $-\dfrac{3}{\mathrm{e}^n} = -3\mathrm{e}^{-n}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$ (car $\mathrm{e}^{-n} = \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$ avec $0 < \frac{1}{\mathrm{e}} < 1$), les deux suites qui encadrent (v_n) tendent vers 0.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. Réponse c)

3) $f(x) = 2 - 3x^{-\frac{1}{2}}$, donc $f'(x) = -3 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{3}{2x\sqrt{x}}$ pour $x > 0$.

$f(1) = 2-3 = -1$ et $f'(1) = \dfrac{3}{2}$. La tangente a pour équation $y = f'(1)(x-1)+f(1) = \dfrac{3}{2}(x-1)-1$, soit $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{2}$. Réponse a)

4) $h = u \times w$ avec $u(x) = \mathrm{e}^{5x+7}$, $u'(x) = 5\mathrm{e}^{5x+7}$, $w(x) = 2x^2+4x+6$, $w'(x) = 4x+4$. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} h'(x) &= 5\mathrm{e}^{5x+7}\left(2x^2+4x+6\right) + \mathrm{e}^{5x+7}(4x+4) \\ &= \left(10x^2+24x+34\right)\mathrm{e}^{5x+7} = 2\left(5x^2+12x+17\right)\mathrm{e}^{5x+7}. \end{aligned}$$

Réponse b)

Exercice 4

3,5 points

Partie A. Recherche du modèle adapté

1) a. La courbe passe par $A(0\,;2)$, donc $\boxed{f(0) = 2}$: au moment de l'injection ($x = 0$), la concentration du médicament dans le sang est de 2 grammes par litre.

b. $f(0) = (0+a)\mathrm{e}^0 = a$, donc $\boxed{a = 2}$.

2) a. La tangente à la courbe en A est la droite (D) d'équation $y = 2$, horizontale : son coefficient directeur est nul, donc $\boxed{f'(0) = 0}$.

b. $f(x) = (x+a)\mathrm{e}^{bx}$ est un produit : pour tout $x \in [0\,;18]$,

$$f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{bx} + (x+a) \times b\,\mathrm{e}^{bx} = (1 + b(x+a))\,\mathrm{e}^{bx}.$$

Donc $f'(0) = 1 + ab = 1 + 2b$. Avec $f'(0) = 0$: $1 + 2b = 0 \iff \boxed{b = -0{,}5}$.

Partie B. Étude théorique

1) Avec la formule précédente pour $a = 2$ et $b = -0{,}5$: pour tout $x \in [0\,;18]$,

$$f'(x) = (1 - 0{,}5(x+2))\,\mathrm{e}^{-0{,}5x} = (1 - 0{,}5x - 1)\mathrm{e}^{-0{,}5x}, \quad \text{soit} \quad \boxed{f'(x) = -0{,}5x\,\mathrm{e}^{-0{,}5x}}.$$

2) Pour tout $x \in [0\,;18]$: $\mathrm{e}^{-0{,}5x} > 0$ et $-0{,}5x \leqslant 0$, avec égalité seulement en $x = 0$. Donc $f'(x) < 0$ sur $]0\,;18]$ et $f'(0) = 0$: $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } [0\,;18]}$.

x	0		18
$f'(x)$	0	$-$	
f	2	↘	$20\mathrm{e}^{-9}$

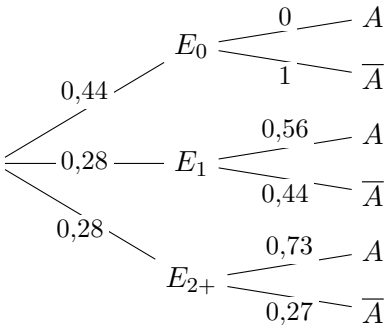
C'est cohérent avec la courbe donnée : la concentration diminue dès l'injection, avec une tangente horizontale en A, et devient presque nulle au bout de 18 heures ($f(18) = 20\mathrm{e}^{-9} \approx 0{,}002$).

Exercice 5

6 points

Partie A

1) On a $P(E_0) = 0{,}44$, $P(E_1) = 0{,}28$, $P(E_{2+}) = 0{,}28$, $P_{E_1}(A) = 0{,}56$, $P_{E_{2+}}(A) = 0{,}73$ et, par complémentaire, $P_{E_1}\left(\overline{A}\right) = 0{,}44$, $P_{E_{2+}}\left(\overline{A}\right) = 0{,}27$.



2) On cherche $P\left(E_1 \cap \overline{A}\right)$:

$$P\left(E_1 \cap \overline{A}\right) = P(E_1) \times P_{E_1}\left(\overline{A}\right) = 0{,}28 \times 0{,}44, \quad \text{soit} \quad \boxed{P\left(E_1 \cap \overline{A}\right) = 0{,}1232}.$$

3) E_0, E_1 et E_{2+} forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P\left(\overline{A}\right) &= P\left(E_0 \cap \overline{A}\right) + P\left(E_1 \cap \overline{A}\right) + P\left(E_{2+} \cap \overline{A}\right) \\ &= 0{,}44 \times 1 + 0{,}1232 + 0{,}28 \times 0{,}27 \\ &= 0{,}44 + 0{,}1232 + 0{,}0756, \end{aligned}$$

soit $\boxed{P\left(\overline{A}\right) = 0{,}6388}$, comme annoncé. Ainsi $P(A) = 1 - 0{,}6388 = 0{,}3612$.

Partie B

1) **a.** On répète 10 fois, de manière identique et indépendante (tirages assimilés à des tirages avec remise), une épreuve de Bernoulli dont le succès « la personne parle bien l'anglais » a pour probabilité $P(A) = 0{,}3612$. X compte le nombre de succès, donc

$$\boxed{X \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}(10\,;\,0{,}3612)}.$$

b. $P(X = 3) = \binom{10}{3} \times 0{,}3612^3 \times 0{,}6388^7 = 120 \times 0{,}3612^3 \times 0{,}6388^7$, soit $\boxed{P(X = 3) \approx 0{,}245}$.

2) **a.** De même, Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;\,0{,}3612)$. Par l'événement contraire :

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0{,}6388^n, \quad \text{soit} \quad \boxed{P(Y \geqslant 1) = 1 - 0{,}6388^n}.$$

b. On résout dans $\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} 1 - 0{,}6388^n \geqslant 0{,}95 &\iff 0{,}6388^n \leqslant 0{,}05 \\ &\iff n\ln(0{,}6388) \leqslant \ln(0{,}05) \quad (\ln \text{ strictement croissante}) \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}6388)} \quad (\text{on divise par } \ln(0{,}6388) < 0). \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}6388)} \approx 6{,}68$. Vérification : $1 - 0{,}6388^6 \approx 0{,}932 < 0{,}95$ et $1 - 0{,}6388^7 \approx 0{,}957 \geqslant 0{,}95$.
La probabilité est supérieure ou égale à $0{,}95$ à partir de $\boxed{n = 7}$.
(Si le logarithme n'a pas encore été vu, on obtient le même résultat avec le tableau de valeurs de la calculatrice.)

c. On augmente n de 1 tant que la probabilité est strictement inférieure à $0{,}95$:

```
n ← 0
Tant que 1 − 0,6388^n < 0,95
    n ← n + 1
Fin du Tant que
Afficher n
```

L'algorithme affiche 7. (Condition équivalente : « Tant que $0{,}6388^n > 0{,}05$ ».)