Calculatrice autorisée

Le résultat d'une question peut être admis pour traiter les questions suivantes.

Exercice 1

2,5 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$.

1) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \geqslant 2^n + n$.

2) Calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2

4,5 points

1) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{\mathrm{e}^{u_n}}{u_n + 2}$.

Soit f la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x+2}$. On a alors $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Montrer que f est strictement croissante sur $[0\,;1]$, puis dresser son tableau de variations.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

c. Montrer que la suite (u_n) converge.

2) On considère désormais la suite (v_n) définie par $v_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{\mathrm{e}^{v_n}}{n+2}$.

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leqslant v_n \leqslant 1$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_{n+1} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+2}$.

b. Calculer la limite de la suite (v_n).

Exercice 3

3,5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

1) Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{3n^2 - 5}{2n^2 + 1}$. Alors :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{3}{2}$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -5$ d) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

2) Soit (v_n) une suite telle que, pour tout entier naturel n, $-\dfrac{3}{\mathrm{e}^n} \leqslant v_n \leqslant 2\mathrm{e}^{-n}$. Alors :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ d) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

3) La courbe représentative de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2 - \dfrac{3}{\sqrt{x}}$ a pour tangente au point d'abscisse 1 la droite d'équation :

a) $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{2}$ b) $y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}$ c) $y = -\dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{2}$ d) $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}$

4) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^{5x+7}\left(2x^2+4x+6\right)$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

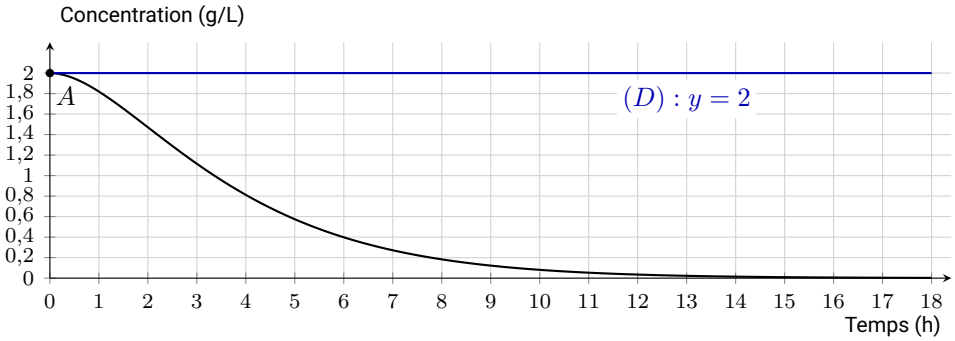
a) $h'(x) = 20(x+1)\mathrm{e}^{5x+7}$ b) $h'(x) = 2\left(5x^2+12x+17\right)\mathrm{e}^{5x+7}$

c) $h'(x) = 4(x+1)\mathrm{e}^{5x+7}$ d) $h'(x) = 2\left(x^2+4x+5\right)\mathrm{e}^{5x+7}$

Exercice 4

3,5 points

On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement la concentration, en grammes par litre, de ce médicament dans le sang. On obtient la courbe ci-dessous.



La droite (D) d'équation $y = 2$ est la tangente à la courbe au point $A(0\,;2)$.
La fonction f qui modélise l'évolution de cette concentration en fonction du temps, en heures, est définie sur $[0\,;18]$ par $f(x) = (x+a)\mathrm{e}^{bx}$, où a et b sont deux nombres réels à déterminer.

Partie A. Recherche du modèle adapté

1) **a.** Préciser la valeur de $f(0)$ et interpréter cette réponse dans le contexte.

b. En déduire la valeur du coefficient a.

2) **a.** Déterminer la valeur de $f'(0)$.

b. En déduire la valeur du coefficient b.

Partie B. Étude théorique

Pour la suite de l'exercice, on admet que la concentration est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;18]$ par $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-0{,}5x}$, où x représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial et $f(x)$ la concentration, en grammes par litre, du médicament dans le sang.

1) On note f' la fonction dérivée de f. Justifier que $f'(x) = -0{,}5x\,\mathrm{e}^{-0{,}5x}$.

2) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0\,;18]$. Est-il cohérent avec la courbe donnée dans l'énoncé ?

Exercice 5

6 points

Partie A

On interroge des Français de plus de 15 ans sur le nombre de langues étrangères qu'ils parlent « bien », c'est-à-dire suffisamment bien pour participer à une conversation. À l'issue du sondage, on observe que l'échantillon des personnes interrogées est partagé en trois catégories :

- $44\,\%$ des personnes interrogées ne parlent « bien » aucune langue étrangère ;
- $28\,\%$ des personnes interrogées parlent « bien » une langue étrangère ;
- $28\,\%$ des personnes interrogées parlent « bien » deux langues étrangères ou plus.

(D'après l'Eurobaromètre 64.3, Commission européenne, 2005.)
Ces trois catégories sont désignées respectivement par L_0, L_1 et L_{2+}.

- $56\,\%$ des personnes de la catégorie L_1 citent l'anglais comme la langue étrangère qu'elles parlent « bien » ;
- $73\,\%$ des personnes de la catégorie L_{2+} citent l'anglais parmi les langues étrangères qu'elles parlent « bien ».

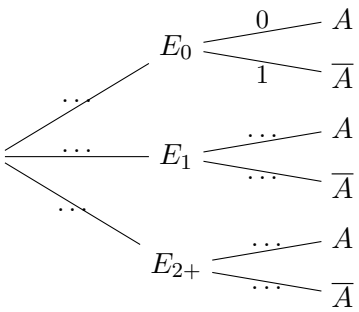
On choisit au hasard une personne interrogée et on note :

- E_0 l'événement : « la personne ne parle bien aucune langue étrangère » ;
- E_1 l'événement : « la personne parle bien une langue étrangère » ;
- E_{2+} l'événement : « la personne parle bien deux langues étrangères ou plus » ;
- A l'événement : « la personne parle bien l'anglais » et $\overline{A}$ l'événement contraire de A.

1) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre pour qu'il traduise les données de l'énoncé.

2) Calculer la probabilité que la personne choisie soit de la catégorie L_1 et qu'elle ne parle pas « bien » l'anglais.

3) Montrer que $P\left(\overline{A}\right) = 0{,}6388$.



Dans la suite de l'exercice, les résultats seront donnés, si nécessaire, arrondis au millième.

Partie B

On interroge successivement et au hasard 10 Français de plus de 15 ans ayant participé au sondage. On admet que le nombre de personnes sondées est suffisamment grand pour que ces choix soient assimilés à des tirages indépendants avec remise.
On désigne par X la variable aléatoire dénombrant les Français qui parlent « bien » l'anglais parmi ces 10 personnes interrogées.

1) **a.** Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Déterminer ses paramètres.

b. Calculer la probabilité de choisir exactement trois personnes parlant « bien » l'anglais.

2) On interroge n Français de plus de 15 ans, où n est un entier naturel non nul. On note Y la variable aléatoire qui recense le nombre de personnes qui parlent « bien » l'anglais parmi les personnes interrogées.

a. Exprimer $P(Y \geqslant 1)$ en fonction de n.

b. À partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins une des personnes interrogées parle « bien » l'anglais est-elle supérieure ou égale à $0{,}95$?

c. Recopier et compléter l'algorithme ci-contre pour qu'il affiche en sortie la valeur de n trouvée à la question précédente.

```
n ← 0
Tant que .....
    n ← .....
Fin du Tant que
Afficher .....
```