Exercice 1

7,5 points

Partie A

1) L'année 2001 correspond à $n = 1$ et l'année 2002 à $n = 2$:

$$u_1 = 0{,}9 \times 0{,}3 \times (1 - 0{,}3) = 0{,}9 \times 0{,}3 \times 0{,}7 = 0{,}189,$$

$$u_2 = 0{,}9 \times 0{,}189 \times (1 - 0{,}189) = 0{,}9 \times 0{,}189 \times 0{,}811 \approx 0{,}137\,95.$$

Comme u_n est exprimé en milliers :

$\boxed{189 \text{ tortues au début de 2001}}$ et environ $\boxed{138 \text{ tortues au début de 2002}}$.

2) **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $u_n \in [0\,;1]$ et $1 - u_n \in [0\,;1]$.

- $0{,}9 \geqslant 0$, $u_n \geqslant 0$ et $1 - u_n \geqslant 0$, donc par produit $u_{n+1} = 0{,}9\,u_n(1 - u_n) \geqslant 0$.
- $1 - u_n \leqslant 1$ et $0{,}9\,u_n \geqslant 0$, donc en multipliant par $0{,}9\,u_n$: $0{,}9\,u_n(1 - u_n) \leqslant 0{,}9\,u_n$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant 0{,}9\,u_n$.

Ainsi, $\boxed{0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0{,}9\,u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant 0{,}3 \times 0{,}9^n$ ».
Initialisation. $u_0 = 0{,}3$ et $0{,}3 \times 0{,}9^0 = 0{,}3$: on a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant 0{,}3$, donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. Alors :

$$\begin{aligned} & 0 \leqslant u_n \leqslant 0{,}3 \times 0{,}9^n \\ \iff\ & 0 \leqslant 0{,}9\,u_n \leqslant 0{,}3 \times 0{,}9^{n+1} && \text{(on multiplie par } 0{,}9 > 0) \\ \implies\ & 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0{,}3 \times 0{,}9^{n+1} && \text{(car } 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0{,}9\,u_n \text{ d'après la question a.)} \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie.
Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire, donc par récurrence :

$$\boxed{0 \leqslant u_n \leqslant 0{,}3 \times 0{,}9^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

c. Comme $-1 < 0{,}9 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}3 \times 0{,}9^n = 0$.
Pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant 0{,}3 \times 0{,}9^n$; d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}.$$

Dans ce modèle, le nombre de tortues tend vers 0 : la population de tortues est **vouée à disparaître**.

3) 30 tortues correspondent à $0{,}03$ millier. On répète le calcul du terme suivant tant que $u_n \geqslant 0{,}03$; l'année est $2000 + n$.

```
u = 0.3
n = 0
while u >= 0.03 :
    u = 0.9*u*(1-u)
    n = n+1
print(2000+n)
```

Vérification. À la calculatrice, $u_{10} \approx 0{,}031\,98 \geqslant 0{,}03$ et $u_{11} \approx 0{,}027\,87 < 0{,}03$: le programme affiche $\boxed{2011}$. Comme $u_{n+1} \leqslant 0{,}9\,u_n < u_n$ dès que $u_n > 0$, la suite est décroissante et il reste moins de 30 tortues à partir de 2011.

Partie B

1) L'année 2011 correspond à $n = 11$ et l'année 2012 à $n = 12$:

$$v_{11} = 1{,}06 \times 0{,}032 \times (1 - 0{,}032) = 1{,}06 \times 0{,}032 \times 0{,}968 = 0{,}032\,834\,56,$$

$$v_{12} = 1{,}06 \times v_{11} \times (1 - v_{11}) \approx 0{,}033\,66.$$

En milliers : $v_{11} \approx 32{,}83$ et $v_{12} \approx 33{,}66$ tortues. Arrondis à l'entier supérieur :

$\boxed{33 \text{ tortues au début de 2011}}$ et $\boxed{34 \text{ tortues au début de 2012}}$.

2) Pour tout $n \geqslant 10$, $v_{n+1} = h(v_n)$ avec $h(x) = 1{,}06\,x(1-x)$.
La suite (v_n) converge vers ℓ, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \ell$.
La fonction h est un polynôme, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$; ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} h(v_n) = h(\ell)$.
Par unicité de la limite, $\ell = h(\ell)$, soit $\boxed{\ell = 1{,}06\,\ell(1-\ell)}$.

3) On résout l'équation :

$$\begin{aligned} \ell = 1{,}06\,\ell(1-\ell) &\iff \ell - 1{,}06\,\ell + 1{,}06\,\ell^2 = 0 \\ &\iff \ell\,(1{,}06\,\ell - 0{,}06) = 0 \\ &\iff \ell = 0 \quad \text{ou} \quad \ell = \frac{0{,}06}{1{,}06} = \frac{3}{53}. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est croissante, donc pour tout $n \geqslant 10$, $v_n \geqslant v_{10} = 0{,}032$, et par passage à la limite $\ell \geqslant 0{,}032$. Donc $\ell \neq 0$ et

$$\boxed{\ell = \frac{3}{53} \approx 0{,}0566}.$$

Le nombre de tortues augmente et se stabilise vers environ 57 tortues ; il reste toujours au moins 32 tortues, au-dessus du seuil critique de 30 individus.
La population **n'est plus en voie d'extinction**.

Exercice 2

7 points

Partie A

1) $f(x)$ existe si et seulement si $x^2 \neq 0$ et $\dfrac{4x^2+x+1}{x^2} \geqslant 0$.
Le trinôme $4x^2+x+1$ a pour discriminant $\Delta = 1^2 - 4\times 4\times 1 = -15 < 0$: il est du signe de $4>0$, donc strictement positif pour tout réel x. Comme $x^2>0$ pour $x\neq 0$, le quotient est positif dès que $x\neq 0$.

$$\boxed{D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\} = \mathbb{R}^*}.$$

2) Soit $x \geqslant 0$.

- $(4x^2+x+1) - 4x^2 = x+1 \geqslant 1 > 0$, donc $4x^2 \leqslant 4x^2+x+1$.
- $(2x+1)^2 - (4x^2+x+1) = 4x^2+4x+1-4x^2-x-1 = 3x \geqslant 0$, donc $4x^2+x+1 \leqslant (2x+1)^2$.

Ainsi, $\boxed{4x^2 \leqslant 4x^2+x+1 \leqslant (2x+1)^2 \text{ pour tout } x\geqslant 0.}$

3) Soit $x>0$. On divise l'encadrement précédent par $x^2>0$:

$$4 \leqslant \frac{4x^2+x+1}{x^2} \leqslant \frac{(2x+1)^2}{x^2}.$$

La fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc :

$$\sqrt{4} \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{\left(\frac{2x+1}{x}\right)^2} = \frac{2x+1}{x} \quad \text{car } \frac{2x+1}{x} > 0 \text{ pour } x>0.$$

D'où $\boxed{2 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{2x+1}{x} \text{ pour tout } x>0.}$

4) Pour $x>0$, $\dfrac{2x+1}{x} = 2+\dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x}=2$.
D'après l'encadrement de la question 3) et le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2}.$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une **asymptote horizontale d'équation** $y=2$ **en** $+\infty$.

Partie B

1) *En* $+\infty$ *et en* $-\infty$. Pour $x\notin\{-2\,;0\}$, on factorise par les termes de plus haut degré :

$$g(x) = \frac{x^2\left(4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = x\times\frac{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}.$$

Le quotient tend vers $\dfrac{4}{1}=4$ en $\pm\infty$, donc par produit :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty}.$$

En -2. $\lim\limits_{x\to-2}(4x^2+x+1)=16-2+1=15>0$ et $\lim\limits_{x\to-2}(x+2)=0$, avec $x+2>0$ si $x>-2$ et $x+2<0$ si $x<-2$. Par quotient :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} g(x)=+\infty} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}} g(x)=-\infty}.$$

La courbe $\mathcal{C}_g$ admet une **asymptote verticale d'équation** $x=-2$. Les limites en $\pm\infty$ étant infinies, $\mathcal{C}_g$ n'a pas d'asymptote horizontale.

2) En $+\infty$, $f(x)$ tend vers 2 alors que $g(x)$ tend vers $+\infty$: pour x assez grand, $g(x)>f(x)$.
Précisément : pour $x\geqslant 2$, d'après la partie A, $f(x)\leqslant 2+\dfrac{1}{x}\leqslant 2{,}5<3$, et

$$g(x)-3=\frac{4x^2-2x-5}{x+2}=\frac{2x(2x-1)-5}{x+2}\geqslant\frac{2\times2\times3-5}{x+2}=\frac{7}{x+2}>0.$$

Donc $g(x)>3>f(x)$ pour tout $x\geqslant 2$: en $+\infty$, $\boxed{\mathcal{C}_g \text{ est au-dessus de } \mathcal{C}_f}$.

3) Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, on réduit au même dénominateur :

$$4x-7+\frac{15}{x+2}=\frac{(4x-7)(x+2)+15}{x+2}=\frac{4x^2+8x-7x-14+15}{x+2}=\frac{4x^2+x+1}{x+2}.$$

Donc $\boxed{g(x)=4x-7+\dfrac{15}{x+2} \text{ pour tout } x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}.}$

4) D'après la question 3), $g(x)-(4x-7)=\dfrac{15}{x+2}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)=+\infty$, donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}[g(x)-(4x-7)]=0}.$$

La droite d'équation $y=4x-7$ est une **asymptote oblique** à $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$.
De plus, pour $x>-2$, $\dfrac{15}{x+2}>0$: $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de cette asymptote.

Exercice 3

3 points

- *Asymptote horizontale.* Pour $x > 0$ assez grand, $f(x) = \dfrac{x\left(1+\frac{b}{x}\right)}{x\left(c+\frac{d}{x}\right)} = \dfrac{1+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}}$, donc, comme $c \neq 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{c}$.
  L'asymptote $y = 2$ en $+\infty$ impose $\dfrac{1}{c} = 2$, soit $c = \dfrac{1}{2}$.
- *Asymptote verticale.* La droite $x = -1$ est asymptote verticale lorsque le dénominateur s'annule en -1 (sans que le numérateur s'y annule) : $c \times (-1) + d = 0$, d'où $d = c = \dfrac{1}{2}$.
- *Limite en* 0. $d \neq 0$, donc f est définie et continue en 0 : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = \dfrac{b}{d}$.
  $\dfrac{b}{d} = 1$ donne $b = d = \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{b = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{2}, \quad d = \frac{1}{2}} \qquad \text{soit} \qquad f(x) = \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}} = \frac{2x+1}{x+1}.$$

Vérification. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{x+1} = 2$; en -1, le numérateur vaut $-1 \neq 0$ et le dénominateur s'annule : $x = -1$ est bien asymptote verticale ; $f(0) = \dfrac{1}{1} = 1$.

Exercice 4

2,5 points

1) Pour $n = 1$: $(1+x)^1 = 1 + x$ et $1 + 1 \times x = 1 + x$.
On a $1 + x \geqslant 1 + x$: l'inégalité est vraie (c'est une égalité) pour $n = 1$.

2) f est dérivable deux fois sur $[0\,;+\infty[$ (fonction polynôme) et, pour tout $x \geqslant 0$:

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1}, \qquad f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}.$$

Comme $n \geqslant 2$, $n(n-1) > 0$; et $1 + x \geqslant 1 > 0$, donc $(1+x)^{n-2} > 0$.
Ainsi $f''(x) > 0$ pour tout $x \geqslant 0$: f est convexe sur $[0\,;+\infty[$.

3) $f(0) = 1^n = 1$ et $f'(0) = n \times 1^{n-1} = n$. La tangente T a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$:

$$\boxed{T : y = nx + 1}.$$

4) f est convexe sur $[0\,;+\infty[$, donc sa courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de chacune de ses tangentes sur cet intervalle, en particulier de T :

$$f(x) \geqslant nx + 1 \quad \text{pour tout } x \geqslant 0, \quad \text{soit} \quad (1+x)^n \geqslant 1 + nx \quad \text{pour } n \geqslant 2.$$

Avec la question 1) pour $n = 1$, on conclut :

$$\boxed{(1+x)^n \geqslant 1 + nx \text{ pour tout réel } x \geqslant 0 \text{ et tout entier } n \geqslant 1.}$$