Calculatrice autorisée en mode examen

Toutes les réponses doivent être justifiées et clairement rédigées.

Exercice 1

7,5 points

On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île.

Partie A

Au début de l'année 2000, on comptait 300 tortues. Une étude a permis de modéliser ce nombre de tortues par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0{,}3 \\ u_{n+1} = 0{,}9\,u_n(1-u_n) \end{cases}$$

où, pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000+n$.

1) Déterminer le nombre de tortues au début de l'année 2001, puis de l'année 2002.

2) On admet que, pour tout entier naturel n, $u_n \in [0\,;1]$ et $1-u_n \in [0\,;1]$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0{,}9\,u_n$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 0{,}3 \times 0{,}9^n$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n). Que peut-on en conclure sur l'avenir de cette population de tortues ?

3) Des études permettent d'affirmer que, si le nombre de tortues à une date donnée est inférieur au seuil critique de 30 individus, alors l'espèce est menacée d'extinction.
Recopier et compléter le programme Python ci-contre afin qu'il affiche l'année à partir de laquelle il reste moins de 30 tortues.

```
1 u = 0.3
2 n = 0
3 while ........ :
4     u = ........
5     n = ........
6 print(........)
```

Partie B

Au début de l'année 2010, il ne reste que 32 tortues. Afin d'assurer la pérennité de l'espèce, des actions sont menées pour améliorer la fécondité des tortues. L'évolution de la population est alors modifiée et le nombre de tortues peut être modélisé par la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_{10} = 0{,}032 \\ v_{n+1} = 1{,}06\,v_n(1-v_n) \end{cases}$$

où, pour tout entier naturel $n \geqslant 10$, v_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000+n$.

1) Calculer le nombre de tortues au début de l'année 2011, puis de l'année 2012 (on arrondira les résultats à l'entier supérieur).

2) On admet que, dans ce modèle, la suite (v_n) est croissante et convergente. On appelle ℓ sa limite. Montrer que ℓ vérifie $\ell = 1{,}06\,\ell(1-\ell)$.

3) La population de tortues est-elle encore en voie d'extinction ?

Exercice 2

7 points

Partie A

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{4x^2+x+1}{x^2}}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1) Déterminer son ensemble de définition, noté D_f.
2) Prouver que, pour tout $x \geqslant 0$, $4x^2 \leqslant 4x^2+x+1 \leqslant (2x+1)^2$.
3) En déduire que, pour tout $x > 0$, $2 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{2x+1}{x}$.
4) Calculer alors la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $g(x) = \dfrac{4x^2+x+1}{x+2}$. On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative.

1) Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_g$?
2) En déduire la position relative de $\mathcal{C}_g$ et de $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
3) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $g(x) = 4x - 7 + \dfrac{15}{x+2}$.
4) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} [g(x) - (4x-7)]$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_g$?

Exercice 3

3 points

On considère une fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x+b}{cx+d}$, où b, c et d sont des réels avec $c \neq 0$, telle que :

- la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ en $+\infty$ et une asymptote verticale d'équation $x = -1$;
- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

Déterminer les réels b, c et d.

Exercice 4

2,5 points

On souhaite démontrer que, pour tout réel x positif et tout entier naturel n non nul,

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx.$$

1) Vérifier que cette inégalité est vraie pour $n = 1$.
2) On suppose que $n \geqslant 2$. Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = (1+x)^n$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
   Montrer que f est convexe sur $[0\,;+\infty[$.
3) Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
4) Conclure.