Exercice 1

4 points

1) Le ballon est lâché à l'instant $t = 0$:

$$h(0) = -5 \times 0^2 + 20 \times 0 + 25 = 25.$$

Le ballon est lâché à $\boxed{25 \text{ m}}$ de hauteur.

2) Le ballon touche le sol lorsque $h(t) = 0$, avec $t \geqslant 0$.

$$\begin{aligned} -5t^2 + 20t + 25 = 0 &\iff -5\left(t^2 - 4t - 5\right) = 0 \\ &\iff t^2 - 4t - 5 = 0 \qquad \text{on divise par } -5 \neq 0. \end{aligned}$$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 16 + 20 = 36 > 0$ et $\sqrt{36} = 6$: deux solutions

$$t_1 = \frac{4 - 6}{2} = -1 \qquad \text{et} \qquad t_2 = \frac{4 + 6}{2} = 5.$$

Un instant est positif : on écarte $t_1 = -1$. Le ballon touche le sol au bout de $\boxed{5 \text{ secondes}}$.
Vérification : $h(5) = -125 + 100 + 25 = 0$.

3) On résout $h(t) > 40$ pour $t \in [0\,;5]$.

$$\begin{aligned} -5t^2 + 20t + 25 > 40 &\iff -5t^2 + 20t - 15 > 0 \\ &\iff t^2 - 4t + 3 < 0 \qquad \text{on divise par } -5 < 0 \text{ : le sens change.} \end{aligned}$$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 > 0$ et $\sqrt{4} = 2$: les racines sont

$$t_1 = \frac{4 - 2}{2} = 1 \qquad \text{et} \qquad t_2 = \frac{4 + 2}{2} = 3.$$

Le trinôme $t^2 - 4t + 3$ a un coefficient $a = 1 > 0$: il est strictement négatif entre ses racines.

t	0		1		3		5
$t^2 - 4t + 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le ballon est au-dessus de 40 m pour $t \in]1\,;3[$, c'est-à-dire pendant $3 - 1 = \boxed{2 \text{ secondes}}$.
Vérification : $h(1) = h(3) = 40$ et $h(2) = 45 > 40$.

Exercice 2

5 points

1) L'aire de $MNPQ$ est celle du rectangle $ABCD$, diminuée des aires des quatre triangles rectangles AMQ, BNM, CPN et DQP (rectangles en A, B, C et D, angles du rectangle).
Pour $x \in [0\,;3]$, les points restent bien sur les côtés, et :

- triangle AMQ : $AM = x$ et $AQ = AD - DQ = 5 - x$, aire $\dfrac{x(5-x)}{2}$;
- triangle BNM : $BN = x$ et $BM = AB - AM = 3 - x$, aire $\dfrac{x(3-x)}{2}$;
- triangle CPN : $CP = x$ et $CN = BC - BN = 5 - x$, aire $\dfrac{x(5-x)}{2}$;
- triangle DQP : $DQ = x$ et $DP = DC - CP = 3 - x$, aire $\dfrac{x(3-x)}{2}$.

L'aire du rectangle vaut $AB \times BC = 3 \times 5 = 15$. Donc

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x) &= 15 - 2 \times \frac{x(5-x)}{2} - 2 \times \frac{x(3-x)}{2} \\ &= 15 - x(5-x) - x(3-x) \\ &= 15 - 5x + x^2 - 3x + x^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{A}(x) = 2x^2 - 8x + 15} \quad \text{pour tout } x \in [0\,;3].$$

2) $\mathcal{A}$ est un trinôme avec $a = 2 > 0$: il admet un minimum en

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2 \times 2} = 2,$$

et $\alpha = 2$ appartient bien à $[0\,;3]$. On calcule $\mathcal{A}(2) = 2 \times 4 - 16 + 15 = 7$.
(Forme canonique : $\mathcal{A}(x) = 2(x-2)^2 + 7$.)

x	0		2		3
$\mathcal{A}(x)$	15	↘	7	↗	9

L'aire est minimale pour $\boxed{x = 2}$, et ce minimum vaut $\boxed{7 \text{ cm}^2}$.

Exercice 3

5 points

1) (E_m) est une équation du second degré si et seulement si le coefficient de x^2 n'est pas nul :

$$\boxed{m \neq 0}.$$

(Pour $m = 0$, l'équation s'écrit $-3x + 1 = 0$: elle est du premier degré.)

2) On remplace x par -1 :

$$m \times (-1)^2 + (m-3) \times (-1) + 1 = m - m + 3 + 1 = 4.$$

Ce nombre vaut $4 \neq 0$ quelle que soit la valeur de m : aucune valeur de m ne fait de -1 une solution de (E_m).

3) **a.** Ici $a = m$, $b = m - 3$ et $c = 1$:

$$\Delta = (m-3)^2 - 4 \times m \times 1 = m^2 - 6m + 9 - 4m$$

$$\boxed{\Delta = m^2 - 10m + 9}$$

b. Le nombre de solutions dépend du signe de Δ, qui est un trinôme en m.
Son discriminant vaut $(-10)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 64 = 8^2$; ses racines sont

$$m_1 = \frac{10 - 8}{2} = 1 \qquad \text{et} \qquad m_2 = \frac{10 + 8}{2} = 9,$$

d'où $\Delta = (m-1)(m-9)$. Le coefficient de m^2 vaut $1 > 0$: Δ est positif à l'extérieur des racines.

m	$-\infty$		1		9		$+\infty$
Δ		$+$	0	$-$	0	$+$	

En tenant compte de la condition $m \neq 0$:

- si $m \in]-\infty\,;0[\cup]0\,;1[\cup]9\,;+\infty[$, alors $\Delta > 0$: (E_m) a deux solutions ;
- si $m = 1$ ou $m = 9$, alors $\Delta = 0$: (E_m) a une seule solution ;
- si $m \in]1\,;9[$, alors $\Delta < 0$: (E_m) n'a aucune solution.

Vérification : pour $m = 1$, l'équation $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0$ a pour unique solution 1 ; pour $m = 9$, $9x^2 + 6x + 1 = (3x+1)^2 = 0$ a pour unique solution $-\frac{1}{3}$.

Exercice 4

3 points

On étudie le signe de la différence $f(x) - g(x)$:

$$f(x) - g(x) = 2x^2 + 8x + 4 - \left(x^2 - 3\right) = x^2 + 8x + 7.$$

$\Delta = 8^2 - 4 \times 1 \times 7 = 64 - 28 = 36 > 0$ et $\sqrt{36} = 6$: deux racines

$$x_1 = \frac{-8-6}{2} = -7 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-8+6}{2} = -1,$$

d'où $f(x) - g(x) = (x+7)(x+1)$. Le coefficient de x^2 vaut $1 > 0$: la différence est positive à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		-7		-1		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- Sur $]-\infty\,;-7[$ et sur $]-1\,;+\infty[$, $f(x) - g(x) > 0$: $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est au-dessus de } \mathscr{C}_g}$.
- Sur $]-7\,;-1[$, $f(x) - g(x) < 0$: $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est en dessous de } \mathscr{C}_g}$.
- En $x = -7$ et $x = -1$, les courbes se coupent. Comme $g(-7) = 49-3 = 46$ et $g(-1) = 1-3 = -2$, les points d'intersection sont $\boxed{(-7\,;46)}$ et $\boxed{(-1\,;-2)}$.

Vérification : $f(-7) = 98 - 56 + 4 = 46$ et $f(-1) = 2 - 8 + 4 = -2$.

Exercice 5

3 points

1) Vrai. Si $\Delta > 0$, f admet deux racines distinctes $x_1 < x_2$, et $f(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines, du signe de $-a$ entre elles.

- Si $a > 0$: pour tout réel $x > x_2$, $f(x) > 0$.
- Si $a < 0$: pour tout réel x compris strictement entre x_1 et x_2, $f(x)$ est du signe de $-a$, donc $f(x) > 0$.

Dans les deux cas, il existe au moins un réel x tel que $f(x) > 0$.

2) Faux. Si $\Delta < 0$, $f(x)$ est du signe de a pour tout réel x : il est négatif seulement lorsque $a < 0$. Contre-exemple : $f(x) = x^2 + 1$. Son discriminant vaut $0^2 - 4 \times 1 \times 1 = -4 < 0$, et pourtant $f(0) = 1 > 0$.

3) Vrai. On calcule

$$f(-1) = a \times (-1)^2 + b \times (-1) + c = a - b + c.$$

Si $a = b - c$, alors $f(-1) = (b - c) - b + c = 0$: -1 est bien une racine de f.