Exercice 1

2 points

1) On calcule d'abord z_0^2, puis $z_0^3 = z_0^2 \times z_0$:

$$z_0^2 = \left(\sqrt{3}+i\right)^2 = 3 + 2\sqrt{3}\,i + i^2 = 2 + 2\sqrt{3}\,i$$

$$z_0^3 = \left(2+2\sqrt{3}\,i\right)\left(\sqrt{3}+i\right) = 2\sqrt{3} + 2i + 6i + 2\sqrt{3}\,i^2 = 2\sqrt{3} + 8i - 2\sqrt{3} = 8i$$

Ainsi $\boxed{z_0^3 = 8i}$: sa partie réelle est nulle, donc z_0^3 est un imaginaire pur.

2) On écrit $7 = 2 \times 3 + 1$:

$$z_0^7 = \left(z_0^3\right)^2 \times z_0 = (8i)^2\left(\sqrt{3}+i\right) = -64\left(\sqrt{3}+i\right)$$

donc $\boxed{z_0^7 = -64\sqrt{3} - 64i}$.

Exercice 2

10 points

1) **a.** L'équation contient z et $\bar{z}$: on pose $z = x + iy$ avec x et y réels, donc $\bar{z} = x - iy$.

- Membre de gauche : $(1+3i)(x-iy) - 1 = x - iy + 3ix + 3y - 1 = (x+3y-1) + i(3x-y)$.
- Membre de droite : $7 + i(x+iy) + x + iy = 7 + ix - y + x + iy = (x - y + 7) + i(x+y)$.

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire :

$$\begin{cases} x + 3y - 1 = x - y + 7 \\ 3x - y = x + y \end{cases} \iff \begin{cases} 4y = 8 \\ 2x = 2y \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{S = \{2 + 2i\}}$$

Vérification : $(1+3i)(2-2i) - 1 = 2 - 2i + 6i + 6 - 1 = 7 + 4i$ *et* $7 + i(2+2i) + 2 + 2i = 7 + 2i - 2 + 2 + 2i = 7 + 4i$.

b. C'est une équation bicarrée : on pose $Z = z^2$. L'équation devient $Z^2 + Z - 6 = 0$.
$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 = 5^2 > 0$, donc $Z_1 = \dfrac{-1-5}{2} = -3$ et $Z_2 = \dfrac{-1+5}{2} = 2$.

- $z^2 = 2 \iff z = \sqrt{2}$ ou $z = -\sqrt{2}$;
- $z^2 = -3 = \left(i\sqrt{3}\right)^2 \iff z = i\sqrt{3}$ ou $z = -i\sqrt{3}$.

$$\boxed{S = \left\{-\sqrt{2}\,;\ \sqrt{2}\,;\ -i\sqrt{3}\,;\ i\sqrt{3}\right\}}$$

c. On reconnaît une somme de deux cubes, $8z^3 + 27 = (2z)^3 + 3^3$, que l'on factorise avec l'identité $A^3 + B^3 = (A+B)\left(A^2 - AB + B^2\right)$ (ici $A = 2z$, $B = 3$) :

$$8z^3 + 27 = (2z+3)\left(4z^2 - 6z + 9\right)$$

(en développant : $8z^3 - 12z^2 + 18z + 12z^2 - 18z + 27 = 8z^3 + 27$.*)*
Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

- $2z+3=0 \iff z=-\dfrac{3}{2}$;
- $4z^2-6z+9=0$: $\Delta=(-6)^2-4\times4\times9=36-144=-108<0$, et $-108=\left(6\sqrt{3}\,i\right)^2$.
  Deux solutions complexes conjuguées : $z=\dfrac{6\pm6\sqrt{3}\,i}{8}=\dfrac{3}{4}\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\,i$.

$$\boxed{S=\left\{-\frac{3}{2}\,;\,\frac{3}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{4}\,i\,;\,\frac{3}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\,i\right\}}$$

2) **a.** $P(-2)=(-2)^3+(-2)^2+4=-8+4+4=0$, donc $\boxed{-2 \text{ est une racine de } P}$.

b. On développe :

$$(z+2)\left(az^2+bz+c\right)=az^3+(2a+b)z^2+(2b+c)z+2c.$$

Par identification des coefficients avec $P(z)=z^3+z^2+0z+4$:

$$\begin{cases} a=1\\ 2a+b=1\\ 2b+c=0\\ 2c=4 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1\\ b=-1\\ c=2 \end{cases}$$

(la dernière équation, $2c=4$, est bien vérifiée par $c=2$). Donc $\boxed{P(z)=(z+2)\left(z^2-z+2\right)}$.

c. $P(z)=0 \iff z+2=0$ ou $z^2-z+2=0$.

- $z+2=0 \iff z=-2$;
- $z^2-z+2=0$: $\Delta=(-1)^2-4\times1\times2=-7<0$, et $-7=\left(i\sqrt{7}\right)^2$, d'où $z=\dfrac{1\pm i\sqrt{7}}{2}$.

$$\boxed{S=\left\{-2\,;\,\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}\,i\,;\,\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}\,i\right\}}$$

Exercice 3

3 points

1) On utilise deux fois une identité remarquable, en écrivant $2=\left(\sqrt{2}\right)^2$ et $u^2+2=u^2-\left(i\sqrt{2}\right)^2$:

$$Q(u)=\left(u^2\right)^2-2^2=\left(u^2-2\right)\left(u^2+2\right)$$

$$\boxed{Q(u)=\left(u-\sqrt{2}\right)\left(u+\sqrt{2}\right)\left(u-i\sqrt{2}\right)\left(u+i\sqrt{2}\right)}$$

Contrôle : $\left(u-i\sqrt{2}\right)\left(u+i\sqrt{2}\right)=u^2-i^2\times2=u^2+2$.

2) Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul :

$$\boxed{S=\left\{-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}\,;\,-i\sqrt{2}\,;\,i\sqrt{2}\right\}}$$

Exercice 4

5 points

1) $10 = 2 \times 5$; ses diviseurs positifs sont 1, 2, 5, 10 et, dans $\mathbb{Z}$, il faut ajouter leurs opposés :

$$\boxed{\{-10\,;\,-5\,;\,-2\,;\,-1\,;\,1\,;\,2\,;\,5\,;\,10\}}$$

2) **Analyse.** Soit n un entier relatif tel que $2n+1$ divise $4n+7$.
$2n+1$ divise aussi $2(2n+1) = 4n+2$. Donc $2n+1$ divise la différence :

$$(4n+7) - (4n+2) = 5.$$

Les diviseurs de 5 dans $\mathbb{Z}$ sont -5, -1, 1 et 5, d'où :

$2n+1$	-5	-1	1	5
n	-3	-1	0	2

Vérification des candidats.

n	$2n+1$	$4n+7$	divisibilité
-3	-5	-5	$-5 = 1 \times (-5)$
-1	-1	3	$3 = (-3) \times (-1)$
0	1	7	$7 = 7 \times 1$
2	5	15	$15 = 3 \times 5$

(Plus généralement, si $2n+1$ divise 5, il divise $5 + 2(2n+1) = 4n+7$.)

$$\boxed{n \in \{-3\,;\,-1\,;\,0\,;\,2\}}$$

3) Pour x et y entiers naturels :

$$xy = 11 + 3y \iff xy - 3y = 11 \iff y(x-3) = 11.$$

y est un entier naturel et le produit vaut $11 > 0$, donc $y \geqslant 1$ et $x - 3 = \dfrac{11}{y} > 0$: y et $x-3$ sont des diviseurs positifs de 11.
Or 11 est premier : ses diviseurs positifs sont 1 et 11.

- $y = 1$ et $x - 3 = 11$: $x = 14$;
- $y = 11$ et $x - 3 = 1$: $x = 4$.

Vérification : $14 \times 1 = 14 = 11 + 3 \times 1$ *et* $4 \times 11 = 44 = 11 + 3 \times 11$.

$$\boxed{(x\,;\,y) \in \{(4\,;\,11)\,;\,(14\,;\,1)\}}$$