Calculatrice autorisée

Exercice 1

2 points

On pose $z_0 = \sqrt{3} + i$.

1) Prouver que z_0^3 est un imaginaire pur.

2) En déduire la forme algébrique de z_0^7.

Exercice 2

10 points

Les questions 1) et 2) de cet exercice sont indépendantes.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. On donnera les solutions sous forme algébrique.

a. $(1+3i)\,\bar{z} - 1 = 7 + iz + z$

b. $z^4 + z^2 - 6 = 0$

c. $8z^3 + 27 = 0$ (on pensera à factoriser)

2) Soit le polynôme P à coefficients réels défini sur $\mathbb{C}$ par

$$P(z) = z^3 + z^2 + 4.$$

a. Prouver que -2 est une racine du polynôme P.

b. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z,

$$P(z) = (z+2)\left(az^2 + bz + c\right).$$

c. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 3

3 points

On considère le polynôme Q à coefficients réels défini sur $\mathbb{C}$ par

$$Q(u) = u^4 - 4.$$

1) Factoriser le polynôme Q dans $\mathbb{C}$ en produit de polynômes du premier degré à coefficients complexes.

2) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $Q(u) = 0$.

Exercice 4

5 points

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1) Dresser, dans $\mathbb{Z}$, la liste des diviseurs de 10.

2) Déterminer les entiers relatifs n tels que $2n+1$ divise $4n+7$.

3) Déterminer les couples d'entiers naturels $(x\,;\,y)$ tels que

$$xy = 11 + 3y.$$