Exercice 1

6 points

1) $g(x)$ existe si et seulement si $2x+5 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq -\dfrac{5}{2}$:

$$\boxed{\mathcal{D}_g = \left]-\infty\,;\,-\tfrac{5}{2}\right[\cup \left]-\tfrac{5}{2}\,;\,+\infty\right[}.$$

g est un quotient de fonctions dérivables, de dénominateur non nul sur $\mathcal{D}_g$. Avec $u(x)=3x+2$, $u'(x)=3$, $v(x)=2x+5$, $v'(x)=2$:

$$g'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{3(2x+5)-2(3x+2)}{(2x+5)^2} = \frac{6x+15-6x-4}{(2x+5)^2} = \boxed{\frac{11}{(2x+5)^2}}.$$

Un carré non nul est strictement positif et $11>0$, donc $g'(x)>0$ sur $\mathcal{D}_g$: g est strictement croissante sur $\left]-\infty\,;\,-\tfrac{5}{2}\right[$ et sur $\left]-\tfrac{5}{2}\,;\,+\infty\right[$.

Limites aux bornes (pour compléter le tableau) : pour $x \neq 0$, $g(x) = \dfrac{3+\frac{2}{x}}{2+\frac{5}{x}}$, donc g tend vers $\dfrac{3}{2}$ en $-\infty$ et en $+\infty$; en $-\frac{5}{2}$, le numérateur tend vers $-\frac{11}{2}<0$ et le dénominateur vers 0, négatif à gauche et positif à droite.

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	$+$		$\|\|$	$+$	
g	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$

Valeurs utiles pour la suite : $g(0)=\dfrac{2}{5}$ et $g(3)=\dfrac{11}{11}=1$.

2) On remarque que $u_{n+1}=g(u_n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $0<u_{n+1}<u_n$ ».

Initialisation. $u_0=3$ et $u_1=g(3)=1$. On a bien $0<1<3$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Les nombres 0, u_{n+1} et u_n appartiennent à $[0\,;\,+\infty[\subset \left]-\tfrac{5}{2}\,;\,+\infty\right[$, intervalle sur lequel g est strictement croissante (elle conserve donc l'ordre) :

$$\begin{aligned}
0<u_{n+1}<u_n &\iff g(0)<g(u_{n+1})<g(u_n) && (g \text{ strictement croissante sur } [0\,;\,+\infty[)\\
&\iff \tfrac{2}{5}<u_{n+2}<u_{n+1} && (\text{car } g(u_k)=u_{k+1})\\
&\implies 0<u_{n+2}<u_{n+1} && (\text{car } \tfrac{2}{5}>0).
\end{aligned}$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}$ est héréditaire, donc par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0<u_{n+1}<u_n}$.

3) D'après la question 2, (u_n) est **décroissante** et **minorée par** 0. D'après le théorème de convergence monotone, (u_n) $\boxed{\text{converge}}$ vers un réel ℓ, avec $0 \leqslant \ell \leqslant u_0 = 3$.

g est continue sur $[0\,;\,3]$ (elle est dérivable sur $\mathcal{D}_g$) et $u_{n+1}=g(u_n)$: la limite ℓ vérifie $g(\ell)=\ell$.

Comme $2\ell+5>0$:

$$\begin{aligned}\frac{3\ell+2}{2\ell+5}=\ell &\iff 3\ell+2=2\ell^2+5\ell\\ &\iff 2\ell^2+2\ell-2=0\\ &\iff \ell^2+\ell-1=0.\end{aligned}$$

$\Delta=1^2-4\times1\times(-1)=5>0$: deux solutions $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}<0$ (exclue, car $\ell\geqslant 0$) et $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\approx 0{,}618.$$

Vérification à la calculatrice : $u_2=\frac{5}{7}\approx 0{,}714$, $u_3=\frac{29}{45}\approx 0{,}644$, $u_4=\frac{177}{283}\approx 0{,}625$: les termes décroissent vers $0{,}618$.

Exercice 2

5 points

1) Pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}w_{n+1}&=u_{n+2}-\frac{1}{2}u_{n+1}=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n-\frac{1}{2}u_{n+1}\\&=\frac{1}{2}u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n=\frac{1}{2}\left(u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n\right)=\frac{1}{2}w_n.\end{aligned}$$

(w_n) est donc géométrique. Son premier terme est $w_0=u_1-\frac{1}{2}u_0=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$:

$$\boxed{q=\frac{1}{2}}\quad\text{et}\quad\boxed{w_0=\frac{1}{2}}.$$

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $w_n=w_0\times q^n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. Or $w_n=u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n$, d'où $u_{n+1}=w_n+\frac{1}{2}u_n$:

$$\boxed{u_{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{1}{2}u_n}.$$

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $u_n=n\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ».

Initialisation. $0\times\left(\frac{1}{2}\right)^0=0=u_0$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. D'après la question 2 :

$$\begin{aligned}u_{n+1}&=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{1}{2}u_n\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{1}{2}\times n\left(\frac{1}{2}\right)^n\quad\text{(hypothèse de récurrence)}\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\\&=(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n}$. Vérification : $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_2 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = \frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{4}$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(n+1-2n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(1-n).$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} > 0$ et, pour $n \geqslant 1$, $1 - n \leqslant 0$. Donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ pour tout $n \geqslant 1$: (u_n) est $\boxed{\text{décroissante à partir du rang } 1}$.

Remarque : $u_1 = u_2 = \frac{1}{2}$ (la décroissance est stricte à partir du rang 2), et $u_1 > u_0$: la suite n'est pas décroissante dès le rang 0.

5) À partir du rang 1, (u_n) est décroissante et minorée par 0 (car $n \geqslant 0$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$). D'après le théorème de convergence monotone, (u_n) $\boxed{\text{converge}}$ vers un réel ℓ.

En passant à la limite dans la relation de la question 2 : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$, et u_{n+1} tend aussi vers ℓ, donc

$$\ell = 0 + \frac{1}{2}\ell \iff \frac{1}{2}\ell = 0 \iff \ell = 0. \qquad \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

Exercice 3

3 points

1) On factorise par les termes prépondérants :

$$u_n = \frac{5^n\left(\frac{1}{5^n}+1\right)}{3^n\left(\frac{2}{3^n}+1\right)} = \left(\frac{5}{3}\right)^n \times \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^n + 1}{2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1}.$$

$\frac{5}{3} > 1$ donc $\lim\left(\frac{5}{3}\right)^n = +\infty$; $-1 < \frac{1}{5} < 1$ et $-1 < \frac{1}{3} < 1$ donc $\left(\frac{1}{5}\right)^n$ et $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ tendent vers 0, et le quotient tend vers $\frac{0+1}{0+1} = 1$. Par produit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

2) Pour $n \geqslant 1$:

$$\frac{3n^2+4n+7}{6n^2+1} = \frac{n^2\left(3+\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}\right)}{n^2\left(6+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{3+\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}}{6+\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

La suite minorante (constante) tend vers $\frac{1}{2}$, la suite majorante aussi. D'après le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}}$.

3) u_n est la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{3}{4} \neq 1$:

$$u_n = 1 \times \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}} = 4\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right).$$

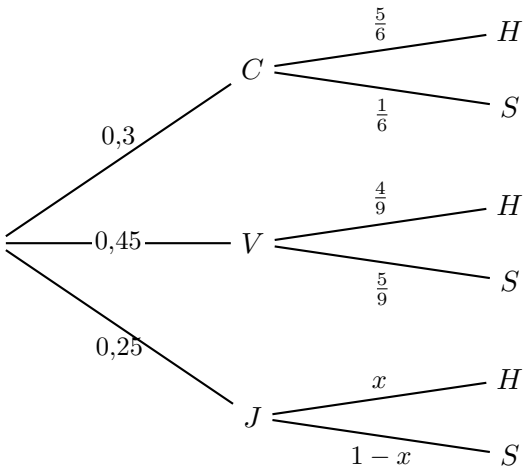
$-1 < \frac{3}{4} < 1$ donc $\lim \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = 0$, et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4}$.

Exercice 4

6 points

Partie 1

1) $P(J) = 1 - 0{,}30 - 0{,}45 = 0{,}25$; $P_C(S) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$; $P_V(H) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$. On note $x = P_J(H)$, inconnue pour l'instant (calculée à la question 5).



On sait de plus que $P(H) = \frac{13}{20} = 0{,}65$.

2) $P(C \cap H) = P(C) \times P_C(H) = 0{,}3 \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{3}{10} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{1}{4}$, soit $\boxed{P(C \cap H) = 0{,}25}$.

3) $P(V \cap S) = P(V) \times P_V(S) = 0{,}45 \times \dfrac{5}{9} = 0{,}25$.
$P(S) = 1 - P(H) = 1 - 0{,}65 = 0{,}35$, donc $P(V) \times P(S) = 0{,}45 \times 0{,}35 = 0{,}1575$.
$P(V \cap S) \neq P(V) \times P(S)$: les évènements V et S $\boxed{\text{ne sont pas indépendants}}$.
(Autre méthode : $P_V(S) = \frac{5}{9} \approx 0{,}556 \neq P(S) = 0{,}35$.)

4) On cherche $P_S(V)$:

$$P_S(V) = \frac{P(V \cap S)}{P(S)} = \frac{0{,}25}{0{,}35} = \boxed{\frac{5}{7}} \approx 0{,}714.$$

5) C, V, J forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(H) = P(C \cap H) + P(V \cap H) + P(J \cap H).$$

Avec $P(V \cap H) = 0{,}45 \times \frac{4}{9} = 0{,}2$, on obtient $P(J \cap H) = 0{,}65 - 0{,}25 - 0{,}2 = 0{,}2$, donc

$$P_J(H) = \frac{P(J \cap H)}{P(J)} = \frac{0{,}2}{0{,}25} = \boxed{\frac{4}{5} = 0{,}8}.$$

Partie 2

1) On répète 60 fois, de manière identique et indépendante (les écoutes sont indépendantes d'après l'énoncé), une épreuve de Bernoulli dont le succès « le morceau est de la musique classique » a pour probabilité $p = P(C) = 0{,}3$. X compte le nombre de succès, donc

$$\boxed{X \sim \mathcal{B}(60\,;\,0{,}3)}.$$

2) $E(X) = np = 60 \times 0{,}3 = \boxed{18}$: sur un grand nombre de trajets de 60 morceaux, Thomas écoute **en moyenne** 18 **morceaux de musique classique** par trajet.
$V(X) = np(1-p) = 60 \times 0{,}3 \times 0{,}7 = \boxed{12{,}6}$ (écart type $\sigma(X) = \sqrt{12{,}6} \approx 3{,}55$).

3) Les valeurs sont données à 10^{-4} près.

a. Pour tout $k \in \{0, \ldots, 60\}$, $P(X = k) = \binom{60}{k} 0{,}3^k\, 0{,}7^{60-k}$, donc

$$P(X = 20) = \binom{60}{20} \times 0{,}3^{20} \times 0{,}7^{40} \approx \boxed{0{,}0931}.$$

La probabilité que Thomas écoute exactement 20 morceaux de musique classique est d'environ $9{,}3\,\%$.

b. À la calculatrice (fonction de répartition binomiale, *binomFRép* ou *BinomialCD* avec $n = 60$, $p = 0{,}3$) :

$$P(X \leqslant 20) \approx \boxed{0{,}7622}.$$

La probabilité que Thomas écoute au plus 20 morceaux de musique classique est d'environ $76\,\%$.

c. X prend des valeurs entières, donc $P(15 < X \leqslant 35) = P(X \leqslant 35) - P(X \leqslant 15)$:

$$P(15 < X \leqslant 35) \approx 0{,}999\,999 - 0{,}243\,784 \approx \boxed{0{,}7562}.$$

La probabilité que Thomas écoute entre 16 et 35 morceaux de musique classique est d'environ $76\,\%$.

d. Par définition d'une probabilité conditionnelle, avec $\{X > 10\} \cap \{X \leqslant 30\} = \{10 < X \leqslant 30\}$:

$$P_{X>10}(X \leqslant 30) = \frac{P(10 < X \leqslant 30)}{P(X > 10)} = \frac{P(X \leqslant 30) - P(X \leqslant 10)}{1 - P(X \leqslant 10)}.$$

À la calculatrice, $P(X \leqslant 10) \approx 0{,}013\,878$ et $P(X \leqslant 30) \approx 0{,}999\,636$, d'où :

$$P_{X>10}(X \leqslant 30) \approx \frac{0{,}985\,758}{0{,}986\,122} \approx \boxed{0{,}9996}.$$

Sachant que Thomas a écouté plus de 10 morceaux de musique classique, la probabilité qu'il en ait écouté au plus 30 est d'environ $99{,}96\,\%$: c'est presque certain.