Calculatrice autorisée

Exercice 1

6 points

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{2u_n + 5} \end{cases}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de $g : x \longmapsto \dfrac{3x+2}{2x+5}$ puis construire, en justifiant, son tableau de variation.
2) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_{n+1} < u_n$.
3) En déduire que (u_n) est convergente, puis déterminer sa limite.

Exercice 2

5 points

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0\ ;\ u_1 = \dfrac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n \end{cases}$

1) Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $w_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n$.
Démontrer que (w_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
2) En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} + \dfrac{1}{2}u_n$.
3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
4) Montrer que (u_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.
5) En déduire que (u_n) est convergente, puis déterminer sa limite.

Exercice 3

3 points

Dans chacun des cas suivants, étudier la limite de la suite (u_n) :

1) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1+5^n}{2+3^n}$
2) $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{2} < u_n \leqslant \dfrac{3n^2+4n+7}{6n^2+1}$
3) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 + \dfrac{3}{4} + \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

Exercice 4

6 points

Thomas possède un lecteur MP3 sur lequel il a stocké plusieurs milliers de morceaux musicaux. L'ensemble des morceaux musicaux qu'il possède se divise en trois genres distincts selon la répartition suivante : $30\,\%$ de musique classique, $45\,\%$ de variété, le reste étant du jazz.

Thomas a utilisé deux qualités d'encodage pour stocker ses morceaux musicaux : un encodage de haute qualité et un encodage standard. On sait que :

- les $\frac{5}{6}$ des morceaux de musique classique sont encodés en haute qualité ;
- les $\frac{5}{9}$ des morceaux de variété sont encodés en qualité standard ;
- les $\frac{13}{20}$ de ses morceaux sont codés en haute qualité.

On considérera les évènements suivants :

C : « Le morceau écouté est un morceau de musique classique »
V : « Le morceau écouté est un morceau de variété »
J : « Le morceau écouté est un morceau de jazz »
H : « Le morceau écouté est encodé en haute qualité »
S : « Le morceau écouté est encodé en qualité standard »

Partie 1

Thomas décide d'écouter un morceau au hasard parmi tous les morceaux stockés sur son MP3 en utilisant la fonction « lecture aléatoire ».

1) Construire un arbre pondéré résumant la situation.

2) Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un morceau de musique classique encodé en haute qualité ?

3) Les évènements V et S sont-ils indépendants ?

4) Le morceau écouté est de qualité standard. Quelle est la probabilité que ce soit un morceau de variété ?

5) Le morceau écouté est un morceau de jazz. Quelle est la probabilité qu'il soit encodé en haute qualité ?

Partie 2

Pendant un long trajet en train, Thomas écoute, en utilisant la fonction « lecture aléatoire » de son MP3, 60 morceaux de musique. La lecture aléatoire choisit chaque morceau au hasard parmi tous les morceaux stockés, indépendamment des morceaux précédents (un même morceau peut être rejoué) : on admet que ces 60 écoutes sont indépendantes. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de morceaux de musique classique qu'a écoutés Thomas lors de ce trajet.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Calculer $E(X)$ et interpréter. Calculer $V(X)$.

3) Calculer puis interpréter :

a. $P(X = 20)$ (formule attendue !) ;
b. $P(X \leqslant 20)$;
c. $P(15 < X \leqslant 35)$;
d. $P_{X>10}(X \leqslant 30)$.