Exercice 1

4 points

On utilise $\in$ / $\notin$ entre un **nombre** et un ensemble, $\subset$ / $\not\subset$ entre deux **ensembles**. Rappel : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

1) $-1{,}5$ n'est pas un entier : $\boxed{-1{,}5 \notin \mathbb{Z}}$.

2) π est irrationnel, donc $\frac{\pi}{3}$ aussi (si $\frac{\pi}{3}$ était un quotient d'entiers $\frac{p}{q}$, alors $\pi = \frac{3p}{q}$ le serait aussi) : $\boxed{\frac{\pi}{3} \notin \mathbb{Q}}$.

3) $\frac{12}{3} = 4$ est un entier, donc un décimal : $\boxed{\frac{12}{3} \in \mathbb{D}}$.

4) $\frac{1}{2}$ est un rationnel qui n'est pas un entier : $\boxed{\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}}$.

5) Tout entier naturel est un entier relatif : $\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}}$.

6) $\sqrt{2}$ (ou π) est un réel qui n'est pas rationnel : $\boxed{\mathbb{R} \not\subset \mathbb{Q}}$.

Exercice 2

6 points

Les points B, C, D sont alignés et $(BD) \perp (AB)$: les triangles ABC et ABD sont rectangles en B. De plus $\widehat{BAD} = \widehat{BAC} + \widehat{CAD} = 15° + 15° = 30°$.

Calcul de BC. Dans le triangle ABC rectangle en B, le côté $[BC]$ est opposé à l'angle $\widehat{BAC}$ et $[AB]$ lui est adjacent :

$$\tan\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{BC}{AB} \iff BC = AB \times \tan(15°) = 25\tan(15°) \approx 6{,}699 \text{ m}.$$

Calcul de BD. Dans le triangle ABD rectangle en B :

$$\tan\left(\widehat{BAD}\right) = \frac{BD}{AB} \iff BD = AB \times \tan(30°) = 25\tan(30°) \approx 14{,}434 \text{ m}.$$

Largeur de la rivière. C est sur le segment $[BD]$, donc

$$DC = BD - BC = 25\tan(30°) - 25\tan(15°) \approx 7{,}735 \text{ m}.$$

La rivière mesure environ $\boxed{7{,}74 \text{ m}}$ de large (au centimètre près).

Remarque : on garde les valeurs exactes $25\tan(30°)$ et $25\tan(15°)$ jusqu'à la soustraction ; arrondir BC et BD avant de soustraire peut fausser le dernier chiffre.

Exercice 3

5 points

1) Pour tout angle aigu α, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. Avec $\alpha = \widehat{DAC}$:

$$\sin^2\left(\widehat{DAC}\right) = 1 - \left(\frac{60}{109}\right)^2 = 1 - \frac{3600}{11\,881} = \frac{8281}{11\,881}.$$

L'angle $\widehat{DAC}$ est aigu, donc son sinus est positif, et $8281 = 91^2$, $11\,881 = 109^2$:

$$\boxed{\sin\left(\widehat{DAC}\right) = \frac{91}{109}}.$$

2) $ABCD$ est un rectangle, donc le triangle ADC est rectangle en D. Pour l'angle $\widehat{DAC}$, $[DA]$ est le côté adjacent, $[DC]$ le côté opposé et $[AC]$ l'hypoténuse.

Calcul de AC.

$$\cos\left(\widehat{DAC}\right) = \frac{DA}{AC} \iff AC = \frac{DA}{\cos\left(\widehat{DAC}\right)} = \frac{12}{\frac{60}{109}} = \frac{12 \times 109}{60} = 21{,}8 \text{ cm}.$$

Calcul de DC.

$$\sin\left(\widehat{DAC}\right) = \frac{DC}{AC} \iff DC = AC \times \sin\left(\widehat{DAC}\right) = 21{,}8 \times \frac{91}{109} = \frac{1983{,}8}{109} = 18{,}2.$$

Donc $\boxed{DC = 18{,}2 \text{ cm}}$.

Vérification (Pythagore dans ADC) : $DA^2 + DC^2 = 144 + 331{,}24 = 475{,}24 = 21{,}8^2 = AC^2$.

Exercice 4

5 points

Angles du triangle ABD. Le triangle ABD est isocèle en B, donc ses angles à la base sont égaux :

$$\widehat{BDA} = \widehat{BAD} = 45°.$$

La somme des angles d'un triangle vaut $180°$:

$$\widehat{ABD} = 180° - 45° - 45° = 90°.$$

Donc $(BD) \perp (AB)$.

Tangente. La droite (BD) passe par le point B du cercle $\mathcal{C}$ et elle est perpendiculaire en B au rayon $[AB]$: c'est la tangente au cercle $\mathcal{C}$ en B.

$\boxed{\text{Oui, Nicolas a raison}}$: (BD) est tangente au cercle $\mathcal{C}$ en B.

