Exercice 1

8 points

1) On représente mentalement les deux intervalles sur une droite graduée : l'intersection est la partie commune, la réunion est la partie couverte par l'un *ou* l'autre.

a. $I = [-2{,}5\,;\,4]$ et $J =]1\,;\,5]$ se chevauchent entre 1 (exclu) et 4 (inclus) :

$$\boxed{I \cap J =]1\,;\,4]} \qquad \boxed{I \cup J = [-2{,}5\,;\,5]}$$

b. $I =]-\infty\,;\,4]$ et $J = [2\,;\,+\infty[$ se chevauchent entre 2 et 4 (inclus) ; à eux deux, ils recouvrent toute la droite :

$$\boxed{I \cap J = [2\,;\,4]} \qquad \boxed{I \cup J = \mathbb{R}}$$

c. $J =]1\,;\,2[$ s'arrête avant 2 (exclu) et $I = [2\,;\,5{,}5]$ commence en 2 : aucun réel n'appartient aux deux intervalles. En revanche, ils se raccordent en 2 :

$$\boxed{I \cap J = \varnothing} \qquad \boxed{I \cup J =]1\,;\,5{,}5]}$$

2) On rappelle que $|a| = a$ si $a \geqslant 0$ et $|a| = -a$ si $a < 0$: il suffit donc de connaître le signe du nombre.

a. $2\sqrt{2} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{8}$ et $8 > 3$, donc $\sqrt{8} > \sqrt{3}$ (la fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$).

Ainsi $2\sqrt{2} - \sqrt{3} > 0$ et $\boxed{\left|2\sqrt{2} - \sqrt{3}\right| = 2\sqrt{2} - \sqrt{3}}$.

b. $\pi > 3$, donc $2\pi > 6$ et $6 - 2\pi < 0$. On prend l'opposé : $\boxed{|6 - 2\pi| = 2\pi - 6}$.

c. $|-2| = 2$ et $|-5+1| = |-4| = 4$, donc $\dfrac{|-2|}{|-5+1|} = \dfrac{2}{4} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$.

d. Un carré est toujours positif : $\left(1-\sqrt{2}\right)^2 \geqslant 0$, donc $\left|\left(1-\sqrt{2}\right)^2\right| = \left(1-\sqrt{2}\right)^2$.

En développant avec $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:

$$\left(1-\sqrt{2}\right)^2 = 1 - 2\sqrt{2} + 2, \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\left|\left(1-\sqrt{2}\right)^2\right| = 3 - 2\sqrt{2}}.$$

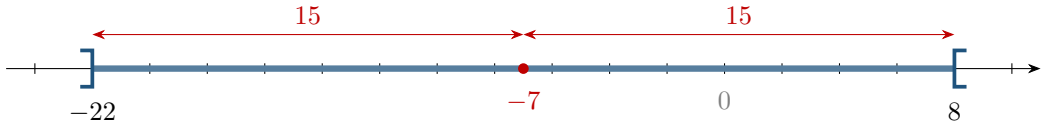
3) On rappelle que, pour $r > 0$, $|x - a| < r \iff a - r < x < a + r$: la distance entre x et a est inférieure à r.

a. $|x+7| = |x-(-7)|$ est la distance entre x et -7.

$$\begin{aligned} |x+7| < 15 &\iff -15 < x + 7 < 15 \\ &\iff -15 - 7 < x < 15 - 7 \quad \text{(on retranche 7)} \\ &\iff -22 < x < 8. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{A =]-22\,;\,8[}$.

Graphiquement : les réels situés à une distance strictement inférieure à 15 de -7.

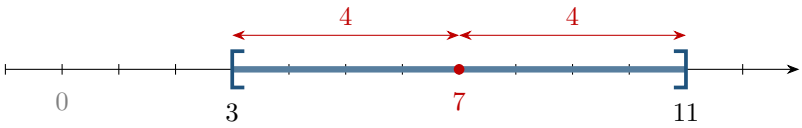


b. $|x-7|$ est la distance entre x et 7.

$$\begin{aligned} |x-7| \leqslant 4 &\iff -4 \leqslant x-7 \leqslant 4 \\ &\iff -4+7 \leqslant x \leqslant 4+7 \quad \text{(on ajoute 7)} \\ &\iff 3 \leqslant x \leqslant 11. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{B = [3\,;\,11]}$.

Graphiquement : les réels situés à une distance inférieure ou égale à 4 de 7.



c. $A =]-22\,;\,8[$ et $B = [3\,;\,11]$ ont en commun les réels compris entre 3 (inclus) et 8 (exclu) :

$$\boxed{A \cap B = [3\,;\,8[}$$

Exercice 2

5 points

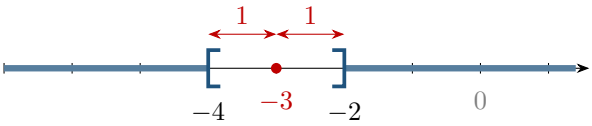
Un intervalle $[a\,;\,b]$ a pour centre $c = \dfrac{a+b}{2}$ et pour rayon $r = \dfrac{b-a}{2}$: alors $x \in [a\,;\,b] \iff |x-c| \leqslant r$ (inégalités strictes pour un intervalle ouvert).

Intervalle	Encadrement(s)	Valeur absolue
$x \in]-3\,;\,-2[$	$\boldsymbol{-3 < x < -2}$	$\boldsymbol{\lvert x+2{,}5\rvert < 0{,}5}$
$\boldsymbol{x \in]1\,;\,7[}$	$1 < x < 7$	$\boldsymbol{\lvert x-4\rvert < 3}$
$\boldsymbol{x \in [-6\,;\,6]}$	$\boldsymbol{-6 \leqslant x \leqslant 6}$	$\lvert x\rvert \leqslant 6$
$\boldsymbol{x \in]-\infty\,;\,-4[\cup]-2\,;\,+\infty[}$	$\boldsymbol{x < -4}$ **ou** $\boldsymbol{x > -2}$	$\lvert x+3\rvert > 1$
$x \in [5\,;\,11]$	$\boldsymbol{5 \leqslant x \leqslant 11}$	$\boldsymbol{\lvert x-8\rvert \leqslant 3}$

Détail des lignes.

- $]-3\,;\,-2[$: centre $\dfrac{-3+(-2)}{2} = -2{,}5$, rayon $\dfrac{-2-(-3)}{2} = 0{,}5$; d'où $|x-(-2{,}5)| < 0{,}5$, soit $|x+2{,}5| < 0{,}5$.

- $1 < x < 7$: centre $\dfrac{1+7}{2} = 4$, rayon $\dfrac{7-1}{2} = 3$; d'où $|x-4| < 3$.
- $|x| \leqslant 6$: la distance entre x et 0 est au plus 6, donc $-6 \leqslant x \leqslant 6$.
- $|x+3| > 1$: la distance entre x et -3 est strictement supérieure à 1 ; x est donc à gauche de $-3-1 = -4$ ou à droite de $-3+1 = -2$ (*graphiquement* ci-dessous) : deux encadrements, $x < -4$ ou $x > -2$.

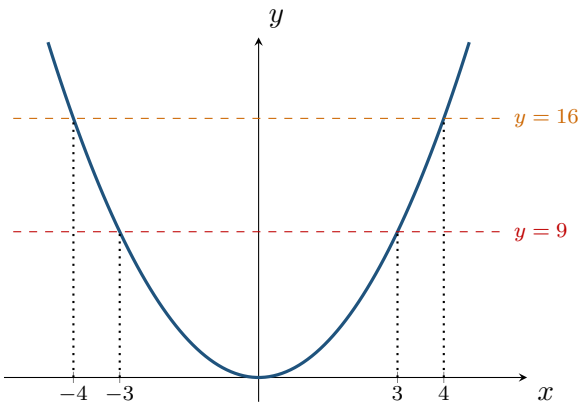


- $[5\,;\,11]$: centre $\dfrac{5+11}{2} = 8$, rayon $\dfrac{11-5}{2} = 3$; d'où $|x-8| \leqslant 3$.

Exercice 3

2 points

On utilise la courbe de la fonction carré $x \mapsto x^2$, et les droites d'équations $y = 9$ et $y = 16$.



a. Un carré est toujours positif, donc $0 \leqslant x^2$ est vrai pour tout réel x. Il reste $x^2 \leqslant 9$: la courbe est sous la droite $y = 9$ entre ses deux points d'intersection, d'abscisses -3 et 3 (car $(-3)^2 = 3^2 = 9$).

$$0 \leqslant x^2 \leqslant 9 \iff -3 \leqslant x \leqslant 3, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{x \in [-3\,;\,3]}.$$

b. La courbe est au-dessus de la droite $y = 16$ à gauche de -4 et à droite de 4 (car $(-4)^2 = 4^2 = 16$).

$$x^2 \geqslant 16 \iff x \leqslant -4 \text{ ou } x \geqslant 4, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{x \in]-\infty\,;\,-4] \cup [4\,;\,+\infty[}.$$

Exercice 4

5 points

1) Notons S le salaire mensuel de Tom. Prendre $30\,\%$ d'une quantité revient à la multiplier par $0{,}3$:

$$0{,}3 \times S = 600 \iff S = \frac{600}{0{,}3} = \frac{6000}{3} = 2000.$$

Le salaire mensuel de Tom est de $\boxed{2000\text{ €}}$.

2) Le taux d'évolution d'une valeur de départ V_D à une valeur d'arrivée V_A est $t = \dfrac{V_A - V_D}{V_D}$.

$$t = \frac{30\,400\,000 - 32\,000\,000}{32\,000\,000} = \frac{-1\,600\,000}{32\,000\,000} = -\frac{16}{320} = -\frac{1}{20} = -0{,}05.$$

Le taux d'évolution est de $\boxed{-5\,\%}$: le chiffre d'affaires a baissé de $5\,\%$ entre 2019 et 2020.

3) Une hausse de $10\,\%$ correspond au coefficient multiplicateur $1 + \dfrac{10}{100} = 1{,}1$, une hausse de $20\,\%$ au coefficient $1{,}2$.
Si P est le prix initial, après les deux hausses successives le prix est $P \times 1{,}1 \times 1{,}2 = 1{,}32\,P$.
Donc

$$1{,}32\,P = 792 \iff P = \frac{792}{1{,}32} = \frac{79\,200}{132} = 600.$$

Vérification : $600 \times 1{,}1 = 660$, puis $660 \times 1{,}2 = 792$.
Avant les deux augmentations, l'objet coûtait $\boxed{600\text{ €}}$.
Attention : les deux hausses ne s'additionnent pas ($10\,\% + 20\,\% = 30\,\%$ donnerait $792 \div 1{,}3 \approx 609{,}23$, faux) ; ce sont les coefficients multiplicateurs qui se multiplient.