Exercice 1

2,5 points

1) $f(-1) = -2 \times (-1)^3 + 5 \times (-1)^2 + 28 \times (-1) - 15 = 2 + 5 - 28 - 15 = \boxed{-36}$.

2) Pour tout réel x, on développe :

$$(5 - x)\left(2x^2 + 5x - 3\right) = 10x^2 + 25x - 15 - 2x^3 - 5x^2 + 3x = -2x^3 + 5x^2 + 28x - 15 = f(x).$$

3) On étudie le signe de chaque facteur.

- $5 - x \geqslant 0 \iff x \leqslant 5$.
- $2x^2 + 5x - 3$: $\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 49 = 7^2 > 0$, racines $x_1 = \dfrac{-5-7}{4} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-5+7}{4} = \dfrac{1}{2}$; le coefficient de x^2 est $2 > 0$, donc le trinôme est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles.

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		5		$+\infty$
$5 - x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x^2 + 5x - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{\mathcal{S} = \left[-3\,;\,\frac{1}{2}\right] \cup [5\,;\,+\infty[}$$

Exercice 2

2,5 points

1) Pour $m = 0$, l'équation devient $-2x + 7 = 0 \iff x = \dfrac{7}{2}$. $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{7}{2}\right\}}$

2) Pour $m = -1$, l'équation devient $-x^2 - 5x + 6 = 0$. $\Delta = (-5)^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 25 + 24 = 49 > 0$:

$$x_1 = \frac{5-7}{-2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+7}{-2} = -6. \qquad \boxed{\mathcal{S} = \{-6\,;\,1\}}$$

3) Pour $m \neq 0$, l'équation est du second degré avec $a = m$, $b = 3m - 2$ et $c = m + 7$:

$$\Delta = (3m-2)^2 - 4m(m+7) = 9m^2 - 12m + 4 - 4m^2 - 28m = \boxed{5m^2 - 40m + 4}.$$

Exercice 3

2,5 points

1) Les deux morceaux mesurent x et $10-x$. x est une longueur, donc $x>0$; c'est celle du plus petit morceau, donc $x \leqslant 10-x$, c'est-à-dire $x \leqslant 5$. Ainsi $\boxed{x \in]0\,;\,5]}$.

2) Le rectangle a pour côtés x et $10-x$, donc pour aire $x(10-x)$:

$$x(10-x)=20 \iff -x^2+10x-20=0 \iff x^2-10x+20=0.$$

$\Delta=(-10)^2-4\times 1\times 20=100-80=20>0$ et $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$:

$$x_1=\frac{10-2\sqrt{5}}{2}=5-\sqrt{5}\approx 2{,}76 \quad \text{et} \quad x_2=5+\sqrt{5}\approx 7{,}24.$$

Seule x_1 appartient à $]0\,;\,5]$ (x_2 est la longueur de l'autre morceau). Il faut donc

$$\boxed{x=5-\sqrt{5}\approx 2{,}76 \text{ cm}}$$

et l'autre morceau mesure alors $5+\sqrt{5}\approx 7{,}24$ cm.

Exercice 4

5 points

1) $f(x)=-\left(x^2+2x\right)+8=-\left[(x+1)^2-1\right]+8$, donc $\boxed{f(x)=-(x+1)^2+9}$.

2) Pour tout réel x : $(2-x)(x+4)=2x+8-x^2-4x=-x^2-2x+8=f(x)$.

3) **a.** Forme canonique : $f(-1)=-0^2+9=\boxed{9}$.

b. Forme développée : $f(0)=\boxed{8}$.

c. Forme factorisée : $f(x)=(2-x)(x+4)$, trinôme de racines -4 et 2, de coefficient de x^2 égal à $-1<0$: il est positif strictement entre les racines.

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\boxed{\mathcal{S}=]-4\,;\,2[}$

d. Forme développée :

$f(x)=8 \iff -x^2-2x=0 \iff -x(x+2)=0 \iff x=0$ ou $x=-2$. $\boxed{\mathcal{S}=\{-2\,;\,0\}}$

e. Forme canonique : pour tout réel x, $(x+1)^2 \geqslant 0$, donc $-(x+1)^2 \leqslant 0$ et

$$f(x) = -(x+1)^2 + 9 \leqslant 9. \qquad \boxed{f(x) \leqslant 9} \text{ (avec égalité pour } x = -1)$$

Exercice 5

3,5 points

1) La suite (u_n) commence à u_1 : son 8e terme est $u_8 = 2 - \dfrac{4}{8} = \boxed{\dfrac{3}{2}}$.

La suite (v_n) commence à v_0 : son 8e terme est $v_7 = -2 \times 7 + 5 = \boxed{-9}$.

2) Pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1} = 2 - \frac{4}{n+1} = \frac{2(n+1)-4}{n+1} = \boxed{\frac{2n-2}{n+1}}.$$

3) $v_n < -8 \iff -2n + 5 < -8 \iff -2n < -13 \iff n > \dfrac{13}{2} = 6{,}5$ (on divise par $-2 < 0$, le sens change).

n est un entier, donc $\boxed{v_n < -8 \text{ à partir de } n = 7}$ (contrôle : $v_6 = -7$ et $v_7 = -9$).

Exercice 6 : vrai ou faux

2 points

L'affirmation est **vraie**.

Si a et c sont de signes opposés (non nuls), alors $ac < 0$, donc $-4ac > 0$. Comme $b^2 \geqslant 0$:

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0.$$

Le discriminant est strictement positif : f admet deux racines réelles distinctes,

donc $\boxed{f \text{ admet au moins une racine réelle}}$.

Exemple : $f(x) = x^2 - 1$ ($a = 1$, $c = -1$) a pour racines -1 et 1. La réciproque est fausse : $x^2 - 3x + 2$ a deux racines (1 et 2) alors que a et c sont de même signe.

Exercice 7

2 points

1) $4x^2 + 19x - 5$: $\Delta = 19^2 - 4 \times 4 \times (-5) = 361 + 80 = 441 = 21^2 > 0$:

$$x_1 = \frac{-19-21}{8} = -5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-19+21}{8} = \frac{1}{4}. \qquad \boxed{\text{racines } -5 \text{ et } \frac{1}{4}}$$

2) **a.** On pose $X = x^2$; alors $x^4 = \left(x^2\right)^2 = X^2$ et

$$4x^4 + 19x^2 - 5 = 0 \iff \begin{cases} X = x^2 \\ 4X^2 + 19X - 5 = 0 \end{cases}$$

On est ramené à une équation du second degré d'inconnue X, celle de la question 1).

b. D'après 1), $X = -5$ ou $X = \dfrac{1}{4}$.

- $x^2 = -5$ n'a pas de solution réelle (un carré est positif).
- $x^2 = \dfrac{1}{4} \iff x = -\dfrac{1}{2}$ ou $x = \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right\}}$$