Exercice 1

3 points

1) On fait apparaître le début d'un carré : $x^2+3x=\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}$, donc

$$f(x)=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-3=\boxed{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{21}{4}}.$$

Le coefficient de x^2 est $1>0$ et le sommet de la parabole a pour abscisse $-\dfrac{3}{2}$:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{21}{4}$	$\nearrow$	

$\boxed{f \text{ est décroissante sur } \left]-\infty\,;\,-\frac{3}{2}\right] \text{ et croissante sur } \left[-\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right[}$.

2) La parabole coupe l'axe des abscisses en $B(-7\,;\,0)$ et $C(9\,;\,0)$: -7 et 9 sont les racines de f, donc il existe un réel $a\neq 0$ tel que, pour tout réel x, $f(x)=a(x+7)(x-9)$ (forme factorisée).
Le point $A(2\,;\,-3)$ est sur la parabole :

$$f(2)=-3 \iff a\times 9\times(-7)=-3 \iff -63a=-3 \iff a=\frac{1}{21}.$$

Donc $\boxed{f(x)=\dfrac{1}{21}(x+7)(x-9)=\dfrac{1}{21}x^2-\dfrac{2}{21}x-3}$.

Exercice 2

3 points

(1) $x^2-3x+2=0 : \Delta=(-3)^2-4\times1\times2=1>0$, deux solutions $x_1=\dfrac{3-1}{2}=1$ et $x_2=\dfrac{3+1}{2}=2$.
$\boxed{\mathcal{S}=\{1\,;\,2\}}$

(2) $x\sqrt{3}-x^2-1=0 \iff -x^2+\sqrt{3}\,x-1=0 : \Delta=\left(\sqrt{3}\right)^2-4\times(-1)\times(-1)=3-4=-1<0$, pas de solution réelle. $\boxed{\mathcal{S}=\varnothing}$

(3) $x^2-4x=-1 \iff x^2-4x+1=0 : \Delta=16-4=12>0$ et $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, donc

$$x_1=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2=2+\sqrt{3}. \qquad \boxed{\mathcal{S}=\left\{2-\sqrt{3}\,;\,2+\sqrt{3}\right\}}$$

Exercice 3

3 points

1) (E_m) est du second degré si et seulement si le coefficient de x^2 est non nul : $\boxed{m \neq 2}$. Alors, avec $a = m-2$, $b = 2(m-3)$ et $c = 3m+1$:

$$\begin{aligned}\Delta_m = b^2 - 4ac &= 4(m-3)^2 - 4(m-2)(3m+1)\\ &= 4\left[m^2 - 6m + 9 - \left(3m^2 + m - 6m - 2\right)\right]\\ &= 4\left(m^2 - 6m + 9 - 3m^2 + 5m + 2\right) = \boxed{4\left(-2m^2 - m + 11\right)}.\end{aligned}$$

2) **Cas** $m = 2$ **:** l'équation devient $-2x + 7 = 0$: elle a une seule solution, $x = \dfrac{7}{2}$.

Cas $m \neq 2$ **:** Δ_m a le signe du trinôme $-2m^2 - m + 11$, de discriminant $1 + 88 = 89 > 0$, de racines

$$m_1 = \frac{1+\sqrt{89}}{-4} = \frac{-1-\sqrt{89}}{4} \approx -2{,}61 \quad \text{et} \quad m_2 = \frac{1-\sqrt{89}}{-4} = \frac{-1+\sqrt{89}}{4} \approx 2{,}11.$$

Le coefficient de m^2 est $-2 < 0$: le trinôme est positif entre ses racines, négatif à l'extérieur.
Remarque : $\sqrt{89} > 9$, donc $m_2 > 2$ et $2 \in]m_1\,;\,m_2[$.

m	$-\infty$		m_1		m_2		$+\infty$
Δ_m		$-$	0	$+$	0	$-$	

Conclusion :

- si $m < m_1$ ou $m > m_2$: $\Delta_m < 0$, $\boxed{\text{aucune solution}}$;
- si $m = m_1$ ou $m = m_2$: $\Delta_m = 0$, $\boxed{\text{une seule solution}}$;
- si $m_1 < m < m_2$ et $m \neq 2$: $\Delta_m > 0$, $\boxed{\text{deux solutions distinctes}}$;
- si $m = 2$: $\boxed{\text{une seule solution}}$, $x = \dfrac{7}{2}$.

3) -2 est solution de (E_m) si et seulement si

$$\begin{aligned}(m-2)\times 4 + 2(m-3)\times(-2) + 3m + 1 = 0 &\iff 4m - 8 - 4m + 12 + 3m + 1 = 0\\ &\iff 3m + 5 = 0 \iff \boxed{m = -\frac{5}{3}}.\end{aligned}$$

On a bien $m \neq 2$: l'équation est alors du second degré et admet -2 pour solution.

Exercice 4

3 points

1) $80\,\%$ des logements sont des appartements : $\boxed{P(A) = 0{,}8}$. Parmi les appartements, $45\,\%$ sont occupés par une seule personne : $\boxed{P_A(S) = 0{,}45}$.

2) $P(A \cap S) = P(A) \times P_A(S) = 0{,}8 \times 0{,}45 = \boxed{0{,}36}$.

3) « Maison occupée par plusieurs personnes » se traduit par $\overline{A} \cap \overline{S}$: $\boxed{P\left(\overline{A} \cap \overline{S}\right) = 0{,}17}$.

4) $P\left(\overline{A}\right) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$, donc

$$P_{\overline{A}}\left(\overline{S}\right) = \frac{P\left(\overline{A} \cap \overline{S}\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \frac{0{,}17}{0{,}2} = \boxed{0{,}85}.$$

Exercice 5

3 points

1) $\boxed{P(V) = 0{,}75}$ et $\boxed{P(A) = 0{,}6}$.
« Au moins l'un des deux soulève plus de 100 kg » est l'événement $A \cup V$: $\boxed{P(A \cup V) = 0{,}85}$.

2) On cherche $P(A \cap V)$. D'après $P(A \cup V) = P(A) + P(V) - P(A \cap V)$:

$$P(A \cap V) = 0{,}6 + 0{,}75 - 0{,}85 = \boxed{0{,}5}.$$

3) On sait que V est réalisé ; on cherche

$$P_V(A) = \frac{P(A \cap V)}{P(V)} = \frac{0{,}5}{0{,}75} = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

Exercice 6

3 points

1) Internes : $180 - 100 = 80$; internes germanistes : $80 - 50 = 30$; demi-pensionnaires germanistes : $40 - 30 = 10$; demi-pensionnaires hispanisants : $100 - 10 = 90$; hispanisants : $90 + 50 = 140$.

	Allemand	**Espagnol**	**Total**
Demi-pension	**10**	**90**	100
Interne	**30**	50	**80**
Total	40	**140**	180

2) **a.** L'élève est choisi au hasard (équiprobabilité) : $P(A) = \frac{40}{180} = \boxed{\frac{2}{9}}$ et $P(A \cap I) = \frac{30}{180} = \boxed{\frac{1}{6}}$.

b. $P_A(I) = \frac{P(A \cap I)}{P(A)} = \frac{1/6}{2/9} = \frac{1}{6} \times \frac{9}{2} = \boxed{\frac{3}{4}}$ (on retrouve $\frac{30}{40}$).
Interprétation : $75\,\%$ des élèves qui apprennent l'allemand sont internes ; autrement dit, un élève germaniste choisi au hasard est interne avec la probabilité $0{,}75$.

3) $P_E(I) = \frac{P(E \cap I)}{P(E)} = \frac{50}{140} = \boxed{\frac{5}{14}} \approx 0{,}36$.

Exercice 7

2 points

Les épicéas sont les arbres qui ne sont pas des sapins : événement $\overline{S}$. On raisonne sur $1\,000$ arbres :

- $30\,\%$ d'épicéas : 300 épicéas et 700 sapins ;
- $10\,\%$ des arbres ont un parasite : 100 arbres touchés ;
- les épicéas représentent $20\,\%$ des arbres touchés : $0{,}2 \times 100 = 20$ épicéas touchés, donc 80 sapins touchés.

	M (parasite)	$\overline{M}$	**Total**
$\overline{S}$ (épicéa)	20	280	300
S (sapin)	80	620	700
Total	100	900	$1\,000$

La probabilité qu'un épicéa soit touché est

$$P_{\overline{S}}(M) = \frac{P\left(\overline{S} \cap M\right)}{P\left(\overline{S}\right)} = \frac{20}{300} = \boxed{\frac{1}{15}} \approx 0{,}067.$$

Par le calcul direct : $P\left(\overline{S} \cap M\right) = P(M) \times P_M\left(\overline{S}\right) = 0{,}1 \times 0{,}2 = 0{,}02$ *et* $\dfrac{0{,}02}{0{,}3} = \dfrac{1}{15}$.