Exercice 1

4 points

1) Les diagonales d'un carré sont perpendiculaires, donc $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$ (A fausse). Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires de sens contraires, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -4 \times 4 = -16$ (B fausse).
Le projeté orthogonal de O sur (AB) est le milieu I de $[AB]$, donc $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA} = 2 \times 4 = 8 \neq 16 = BA^2$ (C fausse).
Le projeté orthogonal de O sur (AD) est le milieu J de $[AD]$, donc $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AJ} = 4 \times 2 = 8$.
Réponse **D**

2) On développe : $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$, d'où

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = -4\,\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Réponse **B**

3) Le triangle est isocèle en G, donc $GE = GF = 8$. Alors $\overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{GF} = GE \times GF \times \cos\widehat{EGF} = 64\cos\widehat{EGF}$, d'où

$$64\cos\widehat{EGF} = 32\sqrt{3} \iff \cos\widehat{EGF} = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \widehat{EGF} = 30°.$$

Réponse **A**

4) $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -4 + 9 = 5$, $BA = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ et $BC = \sqrt{16+9} = 5$.

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{BA \times BC} = \frac{5}{5\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \text{d'où, à la calculatrice, } \widehat{ABC} \approx 71{,}57° \approx 72°.$$

Réponse **D**

Exercice 2

3,5 points

Le triangle ABM est rectangle en M si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

1) D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{MB}$. On développe :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB}.$$

- $M \in [CD]$ avec $DM = CD - CM = 5 - 4 = 1$: $\overrightarrow{MD}$ et $\overrightarrow{MC}$ sont colinéaires de sens contraires, donc $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MC} = -1 \times 4 = -4$.
- $(CD) \perp (BC)$ et $(AD) \perp (CD)$, donc $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$ et $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$.
- $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$ (car $ABCD$ est un rectangle), donc $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB} = DA^2 = 4$.

Ainsi $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -4 + 0 + 0 + 4 = 0$: le triangle ABM est rectangle en M.

2) On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ où $\vec{\imath} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{\jmath} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ sont unitaires, ortho-

gonaux, dirigés comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. Alors

$$A(0\,;\,0),\quad B(5\,;\,0),\quad D(0\,;\,2),\quad C(5\,;\,2),\quad M(1\,;\,2)\ \text{(car } DM = 1\text{)}.$$

$\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = (-1)\times 4 + (-2)\times(-2) = -4+4 = 0$.
Les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux : le triangle ABM est rectangle en M.

Exercice 3

5 points

1) Pour $h \neq 0$, on calcule le taux de variation de f entre 2 et $2+h$. On a $f(2) = 8-6+2 = 4$ et

$$f(2+h) = 2(4+4h+h^2) - 3(2+h) + 2 = 2h^2 + 5h + 4,$$

donc

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{2h^2+5h}{h} = 2h+5.$$

Quand h tend vers 0, $2h+5$ tend vers 5, donc $f'(2) = 5$.
Autre méthode : $f'(x) = 4x-3$, *donc* $f'(2) = 8-3 = 5$.

2) $T : y = f'(2)(x-2) + f(2) = 5(x-2)+4$, soit $T : y = 5x-6$.

3) Pour tout réel x :

$$f(x) - (5x-6) = 2x^2 - 3x + 2 - 5x + 6 = 2x^2 - 8x + 8 = 2\left(x^2 - 4x + 4\right) = 2(x-2)^2.$$

4) Un carré est positif, donc pour tout réel x, $f(x) - (5x-6) = 2(x-2)^2 \geqslant 0$, avec égalité seulement pour $x = 2$.
La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de sa tangente T sur $\mathbb{R}$; elles n'ont qu'un point commun, $A(2\,;\,4)$.

Exercice 4

4 points

1) Pour tous réels a et b :

$$\begin{aligned}(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) &= \left(a^2+2ab+b^2\right)(a+b)\\ &= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\end{aligned}$$

2) Pour $h \neq 0$, avec la question 1) ($b = h$) :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{a^3+3a^2h+3ah^2+h^3-a^3}{h} = \frac{h\left(3a^2+3ah+h^2\right)}{h} = 3a^2+3ah+h^2.$$

Quand h tend vers 0, $3ah+h^2$ tend vers 0, donc le taux de variation tend vers le réel $3a^2$: f est dérivable en a et $f'(a) = 3a^2$.

3) La tangente en A a pour coefficient directeur $f'(a) = 3a^2$ et la tangente en A' a pour coefficient directeur $f'(-a) = 3(-a)^2 = 3a^2$.

Elles ont le même coefficient directeur : les tangentes en A et A' sont parallèles (confondues si $a = 0$, car alors $A = A' = O$).

Exercice 5

3,5 points

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x - 4$. Soit a un réel. La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a a pour équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) = (2a - 4)(x - a) + a^2 - 4a + 5.$$

Elle passe par l'origine $O(0\,;\,0)$ si et seulement si les coordonnées de O vérifient cette équation :

$$\begin{aligned} 0 = (2a - 4)(0 - a) + a^2 - 4a + 5 &\iff 0 = -2a^2 + 4a + a^2 - 4a + 5 \\ &\iff a^2 = 5 \iff a = \sqrt{5} \text{ ou } a = -\sqrt{5}. \end{aligned}$$

On calcule les ordonnées :

- $f\left(\sqrt{5}\right) = 5 - 4\sqrt{5} + 5 = 10 - 4\sqrt{5}$;
- $f\left(-\sqrt{5}\right) = 5 + 4\sqrt{5} + 5 = 10 + 4\sqrt{5}$.

On peut mener une tangente passant par l'origine aux deux points :

$$\boxed{\left(\sqrt{5}\,;\,10 - 4\sqrt{5}\right) \text{ et } \left(-\sqrt{5}\,;\,10 + 4\sqrt{5}\right)}$$

Vérification : en $a = \sqrt{5}$, la tangente a pour équation $y = \left(2\sqrt{5} - 4\right)x$; en $a = -\sqrt{5}$, $y = \left(-2\sqrt{5} - 4\right)x$; ces deux droites passent bien par l'origine.