Exercice 1

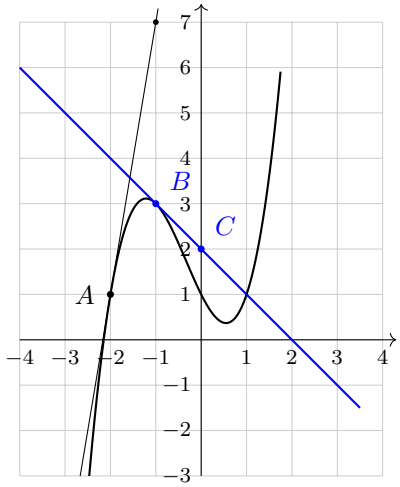
3 points

1) $f'(-2)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A(-2\,;\,1)$. Cette tangente passe par $A(-2\,;\,1)$ et par le point de coordonnées $(-1\,;\,7)$: quand x augmente de 1, y augmente de 6.

$$f'(-2) = \frac{7-1}{-1-(-2)} = \boxed{6}.$$

2) Graphiquement, $f(-1) = 3$: la tangente passe par le point $B(-1\,;\,3)$ de $\mathcal{C}_f$ et a pour coefficient directeur $f'(-1) = -1$. En partant de B, quand x augmente de 1, y diminue de 1 : la tangente passe aussi par $\boxed{C(0\,;\,2)}$ (et par $(2\,;\,0)$).

On trace la droite (BC) (en bleu ci-contre). Son équation est $y = -1 \times (x+1) + 3$, soit $y = -x + 2$.



Exercice 2

4 points

On utilise l'équation de la tangente au point d'abscisse a : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

1) Ici $a = -2$, $f'(-2) = 3$ et $f(-2) = -1$:

$$T : y = 3\big(x-(-2)\big) + (-1) = 3(x+2) - 1, \quad \text{soit} \quad \boxed{T : y = 3x + 5}.$$

2) $A(4\,;\,1) \in \mathcal{C}_g$ donc $g(4) = 1$, et $g'(4) = 2$:

$$T' : y = 2(x-4) + 1, \quad \text{soit} \quad \boxed{T' : y = 2x - 7}.$$

Exercice 3

4 points

1) On connaît les trois longueurs : on utilise l'expression avec les normes, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, donc $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right) = \frac{1}{2}\left(4^2 + 5^2 - 7^2\right) = \frac{1}{2}(16 + 25 - 49) = \boxed{-4}.$$

2) On connaît deux longueurs et l'angle compris entre elles :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC} = 4 \times 5 \times \cos\frac{5\pi}{6} = 20 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{-10\sqrt{3}}.$$

3) Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu O : O est le projeté orthogonal de B sur (AC), et $AO = \dfrac{20}{2} = 10$ cm. Les vecteurs $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont de même

sens :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=AO\times AC=10\times 20=\boxed{200}.$$

4) Dans le rectangle $ABCD$, $(BC)\perp(AB)$: B est le projeté orthogonal de C sur (AB). Donc :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=AB^2=8^2=\boxed{64}.$$

Exercice 4

5 points

Dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$: $A(0\,;\,0)$, $B(1\,;\,0)$, $C(1\,;\,1)$, $D(0\,;\,1)$, $E\left(\frac{1}{2}\,;\,0\right)$ et $O\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ (milieu de $[AC]$).

1) $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0{,}5\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=0{,}5\times 1+0\times 1=\boxed{0{,}5}$.

2) $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}0{,}5\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DB}=0{,}5\times 1+(-1)\times(-1)=\boxed{1{,}5}$.

Par ailleurs $DE=\sqrt{0{,}5^2+(-1)^2}=\sqrt{1{,}25}$ et $DB=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$. Comme $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DB}=DE\times DB\times\cos\widehat{EDB}$:

$$\cos\widehat{EDB}=\frac{1{,}5}{\sqrt{1{,}25}\times\sqrt{2}}=\frac{1{,}5}{\sqrt{2{,}5}}\approx 0{,}9487,\quad\text{d'où, à la calculatrice,}\quad\boxed{\widehat{EDB}\approx 18^\circ}.$$

3) $F\in[AD]$ donc $F(0\,;\,y)$ avec $y\in[0\,;\,1]$. Alors $\overrightarrow{OF}\begin{pmatrix}-0{,}5\\y-0{,}5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}0{,}5\\-1\end{pmatrix}$.

$$(OF)\perp(DE)\iff\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{DE}=0\iff-0{,}5\times 0{,}5+(y-0{,}5)\times(-1)=0\iff y=0{,}25.$$

Comme $0{,}25\in[0\,;\,1]$, le point cherché est $\boxed{F(0\,;\,0{,}25)}$.

Exercice 5

4 points

1) Dans un triangle équilatéral, $\widehat{BAC}=60^\circ$: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\times 4\times\cos 60^\circ=16\times 0{,}5=8$. Réponse **a.**

2) Dans le parallélogramme, $\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=-AB^2=-36$ (et $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=AD=3\neq 6$). Réponse **c.**

3) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times 7+2\times(-2)=10$. (De plus $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=2\sqrt{2}$, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-2\neq 0$ et $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=43$.) Réponse **b.**

4) Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB). Le triangle étant isocèle en C, H est le milieu de $[AB]$, donc $AH=3$ et $\overrightarrow{AH}$ a le même sens que $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=AB\times AH=6\times 3=18$. Réponse **d.**