Exercice 1

3 points

Question 1. $f(1) = \dfrac{1-2}{1} = -1$ et, pour $h \neq 0$ et $h \neq -1$:

$$f(1+h) = \frac{1-2(1+h)^2}{1+h} = \frac{1-2-4h-2h^2}{1+h} = \frac{-1-4h-2h^2}{1+h}.$$

$$f(1+h) - f(1) = \frac{-1-4h-2h^2}{1+h} + \frac{1+h}{1+h} = \frac{-3h-2h^2}{1+h} = \frac{h(-2h-3)}{1+h}.$$

$$t(h) = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{-2h-3}{h+1}.$$

Réponse **c.**

Question 2. On étudie le signe de la différence :

$$f(x) - g(x) = 2x^2 - 8x + 17 - 5x + 3 = 2x^2 - 13x + 20.$$

$\Delta = (-13)^2 - 4 \times 2 \times 20 = 169 - 160 = 9 > 0$, d'où deux racines $x_1 = \dfrac{13-3}{4} = \dfrac{5}{2}$ et $x_2 = \dfrac{13+3}{4} = 4$. Le coefficient de x^2 est $2 > 0$: le trinôme est strictement négatif entre ses racines, donc $f(x) - g(x) < 0$ sur $\left]\dfrac{5}{2}\,;\,4\right[$: $\mathcal{C}_f$ est strictement en dessous de $\mathcal{C}_g$ sur cet intervalle (la réponse c. est fausse, par exemple $f(3) - g(3) = -1$). Réponse **b.**

Question 3. $P(D) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$. Les deux choix sont indépendants. « Un seul pneu présente un défaut » correspond aux deux issues $(D\,;\,\overline{D})$ et $(\overline{D}\,;\,D)$:

$$P = 0{,}2 \times 0{,}8 + 0{,}8 \times 0{,}2 = 2 \times 0{,}16 = 0{,}32.$$

Réponse **a.**

Exercice 2

5 points

1) $u_0 = \dfrac{0+2}{0+1} = \boxed{2}$, $\quad u_1 = \dfrac{1+2}{1+1} = \boxed{\dfrac{3}{2}}$, $\quad u_2 = \dfrac{2+2}{2+1} = \boxed{\dfrac{4}{3}}$.

2) On remplace n par $n+1$: $\quad u_{n+1} = \dfrac{(n+1)+2}{(n+1)+1} = \boxed{\dfrac{n+3}{n+2}}$.

3) Pour tout entier naturel n, on réduit au même dénominateur $(n+1)(n+2)$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+3}{n+2} - \frac{n+2}{n+1} = \frac{(n+3)(n+1) - (n+2)^2}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2+4n+3-\left(n^2+4n+4\right)}{(n+1)(n+2)} = \boxed{\frac{-1}{(n+1)(n+2)}}.$$

4) Pour tout entier naturel n, $n+1 > 0$ et $n+2 > 0$, donc $(n+1)(n+2) > 0$ et $u_{n+1} - u_n < 0$. La suite (u_n) est donc **strictement décroissante**.

5) À la calculatrice : $u_{10} \approx 1{,}091$; $u_{100} \approx 1{,}0099$; $u_{1000} \approx 1{,}000\,999$. Les termes se rapprochent de 1 : on conjecture que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$.

6) **a.** On augmente n tant que la condition $u_n \leqslant 1{,}021$ n'est pas réalisée, c'est-à-dire tant que $u_n > 1{,}021$:

```
from math import *
def suite():
    n = 0
    while (n+2)/(n+1) > 1.021 :
        n = n + 1
    return n
```

b. Avec le tableau de valeurs de la calculatrice : $u_{46} = \dfrac{48}{47} \approx 1{,}021\,28 > 1{,}021$ et $u_{47} = \dfrac{49}{48} \approx 1{,}020\,83 \leqslant 1{,}021$. Comme la suite est décroissante, la plus petite valeur cherchée est $\boxed{n = 47}$.

c. Pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{(n+1)+1}{n+1} = 1 + \dfrac{1}{n+1}$. Donc, puisque $n+1 > 0$:

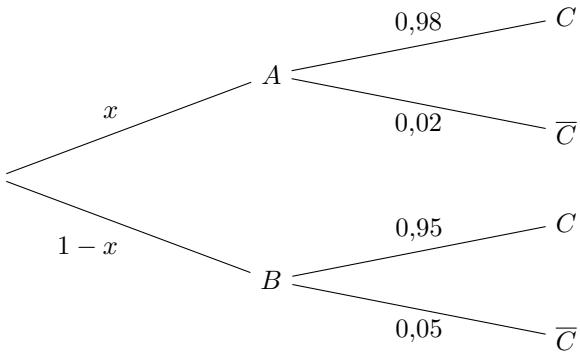
$$u_n \leqslant 1{,}021 \iff \frac{1}{n+1} \leqslant 0{,}021 \iff n+1 \geqslant \frac{1}{0{,}021} \iff n \geqslant \frac{1}{0{,}021} - 1.$$

Or $\dfrac{1}{0{,}021} - 1 \approx 46{,}62$. Le plus petit entier qui convient est bien $\boxed{n = 47}$.

Exercice 3

7 points

1) On a $P(A) = x$, $P(B) = P\left(\overline{A}\right) = 1 - x$, $P_A(C) = 0{,}98$ et $P_B(C) = 0{,}95$.



2) A et B forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(C) = P(A \cap C) + P(B \cap C) = 0{,}98x + 0{,}95(1-x) = 0{,}98x + 0{,}95 - 0{,}95x = \boxed{0{,}03x + 0{,}95}.$$

3) $P(C) = 0{,}96 \iff 0{,}03x + 0{,}95 = 0{,}96 \iff 0{,}03x = 0{,}01 \iff x = \dfrac{1}{3}$. Donc $P(A) = \dfrac{1}{3}$ et

$P(B) = 1 - \dfrac{1}{3} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$.

4) $A \cap C$: « la tablette prélevée provient de la chaîne A **et** elle est commercialisable ».

$$P(A \cap C) = P(A) \times P_A(C) = \frac{1}{3} \times 0{,}98 = \boxed{\frac{49}{150} \approx 0{,}327}.$$

5) $P(A) \times P(C) = \dfrac{1}{3} \times 0{,}96 = 0{,}32$, alors que $P(A \cap C) = \dfrac{49}{150} \approx 0{,}327$. Comme $P(A \cap C) \neq P(A) \times P(C)$, les évènements A et C ne sont pas indépendants.

6) $P_C(A) = \dfrac{P(A \cap C)}{P(C)} = \dfrac{49/150}{0{,}96} = \dfrac{49}{144} \approx \boxed{0{,}34}$.
Interprétation : parmi les tablettes commercialisables, environ $34\,\%$ proviennent de la chaîne A.

7) On cherche $P(A \cup C)$:

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{1}{3} + 0{,}96 - \frac{49}{150} = \frac{29}{30} \approx 0{,}967.$$

Ainsi environ $96{,}7\,\% < 97\,\%$ des tablettes sont commercialisables ou proviennent de la chaîne A : la chocolaterie a tort.

Exercice 4

5 points

1) Pour tout réel x : $\boxed{g'(x) = 3x^2 - 6x - 9}$.

2) Deux droites (non verticales) sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur. Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse x est $g'(x)$; on résout donc :

$$g'(x) = -9 \iff 3x^2 - 6x = 0 \iff 3x(x-2) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 2.$$

Les points cherchés ont pour abscisses $\boxed{0 \text{ et } 2}$.

3) **a.** Pour tout réel a :

$$(a-1)\left(2a^2 - a - 1\right) = 2a^3 - a^2 - a - 2a^2 + a + 1 = \boxed{2a^3 - 3a^2 + 1}.$$

b. La tangente Δ_a a pour équation $y = g'(a)(x-a) + g(a)$. Le point $O(0\,;\,0)$ appartient à Δ_a si et seulement si ses coordonnées vérifient cette équation :

$$O \in \Delta_a \iff 0 = g'(a)(0-a) + g(a) \iff 0 = -a\,g'(a) + g(a) \iff \boxed{g(a) = a \times g'(a)}.$$

c. Pour tout réel a :

$$g(a) - a\,g'(a) = a^3 - 3a^2 - 9a - 1 - \left(3a^3 - 6a^2 - 9a\right) = -2a^3 + 3a^2 - 1.$$

D'où, avec la question **a.** :

$$g(a) = a\,g'(a) \iff 2a^3 - 3a^2 + 1 = 0 \iff (a-1)\left(2a^2 - a - 1\right) = 0.$$

Le trinôme $2a^2 - a - 1$ a pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$ et pour racines $\dfrac{1-3}{4} = -\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1+3}{4} = 1$. Les solutions sont donc $\boxed{a = 1 \text{ et } a = -\dfrac{1}{2}}$.

- Pour $a = 1$: $g(1) = -12$ et $g'(1) = -12$, donc $\Delta_1 : y = -12(x-1) - 12$, soit $\boxed{y = -12x}$.
- Pour $a = -\dfrac{1}{2}$: $g\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{8} - \dfrac{3}{4} + \dfrac{9}{2} - 1 = \dfrac{21}{8}$ et $g'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{4} + 3 - 9 = -\dfrac{21}{4}$, donc $y = -\dfrac{21}{4}\left(x + \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{21}{8}$, soit $\boxed{y = -\dfrac{21}{4}x}$.

Il y a exactement deux tangentes à Γ passant par l'origine.