Calculatrice autorisée

Exercice 1

3 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, ***une seule*** *des trois réponses proposées est exacte. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie* ***en justifiant la réponse****. Toute réponse non justifiée ne rapporte pas de point.*

Question 1 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1-2x^2}{x}$. On désigne par h un réel non nul et différent de -1.
Le taux de variation $t(h)$ de f entre 1 et $1+h$ est égal à :

a. $\dfrac{-2h-4}{h+1}$ **b.** $\dfrac{-2h+1}{h+1}$ **c.** $\dfrac{-2h-3}{h+1}$

Question 2 : On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par $f(x) = 2x^2 - 8x + 17$ et $g(x) = 5x - 3$. On note respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère du plan.

a. $\mathcal{C}_f$ est située strictement au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $\left]\dfrac{5}{2}\,;\,4\right[$.

b. $\mathcal{C}_f$ est située strictement en dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $\left]\dfrac{5}{2}\,;\,4\right[$.

c. $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.

Question 3 : Un réparateur choisit successivement et de façon indépendante **deux** pneus au hasard dans son stock. On suppose que le stock de pneus est suffisamment important pour assimiler ce choix à une succession de deux épreuves indépendantes. On note $P(\overline{D})$ la probabilité qu'un pneu ne présente aucun défaut et on admet que $P(\overline{D}) = 0{,}8$. La probabilité qu'un seul des deux pneus choisis présente un défaut est égale à :

a. $0{,}32$ **b.** $0{,}16$ **c.** $0{,}2$

Exercice 2

5 points

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$.

1) Déterminer les valeurs exactes des trois premiers termes de la suite.

2) Exprimer, pour tout entier naturel n, u_{n+1} en fonction de n.

3) En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-1}{(n+1)(n+2)}$.

4) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

5) Conjecturer, à l'aide de la calculatrice, la limite de la suite (u_n).

6) **a.** Recopier et compléter ce programme Python pour qu'il permette de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \leqslant 1{,}021$.

```
from math import *
def suite():
    n = 0
    while (n+2)/(n+1) ........ :
        n = ........
    return ........
```

b. Déterminer à l'aide de la calculatrice la plus petite valeur de n telle que $u_n \leqslant 1{,}021$.

c. Retrouver ce résultat par un calcul.

Exercice 3

7 points

Une chocolaterie fabrique des tablettes de chocolat noir, de 100 grammes, dont la teneur en cacao annoncée est de $85\,\%$. À l'issue de la fabrication, la chocolaterie considère que certaines tablettes ne sont pas commercialisables : tablettes cassées, mal emballées, mal calibrées, etc.

La chocolaterie dispose de deux chaînes de fabrication :

- la chaîne A, lente, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est égale à $0{,}98$;
- la chaîne B, rapide, pour laquelle la probabilité qu'une tablette de chocolat soit commercialisable est $0{,}95$.

À la fin d'une journée de fabrication, on prélève au hasard une tablette et on définit les évènements suivants :

- A : « La tablette de chocolat provient de la chaîne de fabrication A » ;
- B : « La tablette de chocolat provient de la chaîne de fabrication B » ;
- C : « La tablette de chocolat est commercialisable ».

On note x la probabilité qu'une tablette de chocolat provienne de la chaîne A.

1) Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

2) Montrer que $P(C) = 0{,}03x + 0{,}95$.

3) À l'issue de la production, on constate que $96\,\%$ des tablettes sont commercialisables et on retient cette valeur pour toute la suite de l'exercice pour modéliser la probabilité qu'une tablette soit commercialisable. Montrer que $P(B) = \dfrac{2}{3}$.

4) Définir par une phrase l'évènement $A \cap C$ et calculer $P(A \cap C)$.

5) Les évènements A et C sont-ils indépendants ?

6) Calculer $P_C(A)$. Arrondir la valeur au centième et interpréter le résultat.

7) La chocolaterie affirme qu'il y a plus de $97\,\%$ des tablettes de chocolat commercialisables ou provenant de la chaîne A. A-t-elle raison ? Justifier.

Exercice 4

5 points

On considère la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$, et on note Γ sa courbe représentative dans un repère $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Pour tout réel a, on appelle Δ_a la tangente à Γ en son point d'abscisse a.

1) Déterminer l'expression de $g'(x)$.

2) Donner les abscisses des points de Γ en lesquels la tangente a le même coefficient directeur que la droite d'équation $y = -9x + 4$.

3) L'objectif de cette question est de trouver toutes les tangentes à Γ qui contiennent l'origine O.

a. Vérifier que, pour tout réel a, $2a^3 - 3a^2 + 1 = (a-1)\left(2a^2 - a - 1\right)$.

b. Établir que la droite Δ_a contient le point O si et seulement si le réel a vérifie $g(a) = a \times g'(a)$.

c. En déduire les valeurs de a cherchées, puis donner une équation de chacune des tangentes à Γ passant par O.