Exercice 1

2,5 points

1) On rappelle que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

- $\dfrac{1}{8} = 0{,}125 = \dfrac{125}{1\,000}$ est un nombre décimal, mais pas un entier : $\boxed{\dfrac{1}{8} \in \mathbb{D}}$.
- $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$. Comme $\sqrt{2}$ est irrationnel, $5\sqrt{2}$ l'est aussi (sinon $\sqrt{2} = \dfrac{5\sqrt{2}}{5}$ serait rationnel) : $\boxed{\sqrt{50} \in \mathbb{R}}$ (et $\sqrt{50} \notin \mathbb{Q}$).
- $\dfrac{2}{3}$ est rationnel, mais pas décimal : son écriture décimale $0{,}666\ldots$ est illimitée (le dénominateur 3 de la fraction irréductible n'est pas de la forme $2^a \times 5^b$) : $\boxed{\dfrac{2}{3} \in \mathbb{Q}}$.
- $\dfrac{42}{3(-2-5)} = \dfrac{42}{3 \times (-7)} = \dfrac{42}{-21} = -2$: c'est un entier négatif, donc $\boxed{\dfrac{42}{3(-2-5)} \in \mathbb{Z}}$.

2) $\dfrac{7}{3} = 2{,}333\ldots$ et $\dfrac{5}{2} = 2{,}5$.

- **Un décimal :** $\boxed{2{,}4}$ convient, car $3 \times 2{,}4 = 7{,}2 > 7$ donne $2{,}4 > \dfrac{7}{3}$, et $2{,}4 < 2{,}5$.
- **Un rationnel :** on met les deux fractions au même dénominateur 12 :

$$\frac{7}{3} = \frac{28}{12} \quad \text{et} \quad \frac{5}{2} = \frac{30}{12}, \quad \text{donc} \quad \frac{28}{12} < \boxed{\frac{29}{12}} < \frac{30}{12}.$$

($2{,}4 = \dfrac{12}{5}$ est aussi un rationnel qui convient ; $\dfrac{29}{12}$ est un rationnel non décimal.)

Exercice 2

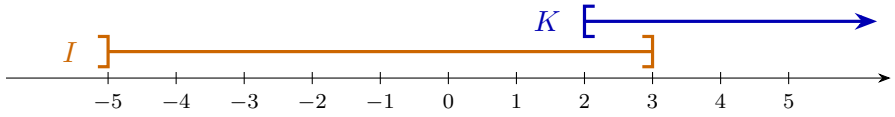
3,5 points

1) Tableau complété (réponses encadrées) :

Inégalité(s)	Intervalle associé
$\boxed{-6 \leqslant x < 4}$	$[-6\,;\,4[$
$x \leqslant -1$	$\boxed{]-\infty\,;\,-1]}$
$\boxed{x > -2}$	$]-2\,;\,+\infty[$
$2 < x < 6$	$\boxed{]2\,;\,6[}$
$\boxed{0 < x \leqslant 7}$	$\boxed{]0\,;\,7]}$

Un crochet tourné vers le nombre signifie que la borne est comprise ($\leqslant$), un crochet tourné vers l'extérieur qu'elle est exclue ($<$). Pour la dernière ligne, « strictement positif » donne $x > 0$ et « inférieur ou égal à 7 » donne $x \leqslant 7$.

2) On représente les deux intervalles sur une droite graduée.



a. $I \cap K$ contient les réels qui sont à la fois dans I et dans K, c'est-à-dire tels que $x \geqslant 2$ et $x \leqslant 3$:

$$I \cap K = \boxed{[2\,;\,3]}.$$

b. $I \cup K$ contient les réels qui sont dans I ou dans K (ou dans les deux). Les deux intervalles se chevauchent sur $[2\,;\,3]$, donc leur réunion va de -5 (exclu) jusqu'à $+\infty$:

$$I \cup K = \boxed{]-5\,;\,+\infty[}.$$

Exercice 3

2 points

1) **Faux.** Contre-exemple : 1 et 3 sont deux décimaux non nuls, mais $\dfrac{1}{3}$ n'est pas décimal.

En effet, si l'on avait $\dfrac{1}{3} = \dfrac{a}{10^n}$ avec a entier, on aurait $10^n = 3a$, donc 3 diviserait $10^n = 2^n \times 5^n$, ce qui est impossible. Ainsi l'affirmation est fausse.

2) **Faux.** Contre-exemple : $0{,}01$ est un nombre décimal et $0{,}01 \times 10 = 0{,}1$, qui n'est pas un entier. Donc l'affirmation est fausse.

Exercice 4

5 points

1) **Développer et réduire.**

$$\begin{aligned} A &= (x-1)(2-3x) - 4(3-x) \\ &= 2x - 3x^2 - 2 + 3x - 12 + 4x \\ &= \boxed{-3x^2 + 9x - 14}. \end{aligned}$$

Pour B, on utilise $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ et $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$:

$$\begin{aligned} B &= (2x-3)^2 + (1+x)(1-x) \\ &= 4x^2 - 12x + 9 + 1 - x^2 \\ &= \boxed{3x^2 - 12x + 10}. \end{aligned}$$

Vérification pour $x = 1$: $A = 0 - 12 = -12 = -3 + 9 - 14$; $B = 1 + 0 = 1 = 3 - 12 + 10$.

2) **Factoriser.**

- x est un facteur commun : $C = 2x^2 + x = x \times 2x + x \times 1 = \boxed{x(2x+1)}$.

- On reconnaît $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ avec $a = 2x+1$ et $b = x+1$:

$$\begin{aligned} D &= \big[(2x+1)-(x+1)\big]\big[(2x+1)+(x+1)\big] \\ &= (2x+1-x-1)(2x+1+x+1) \\ &= \boxed{x(3x+2)}. \end{aligned}$$

Exercice 5

5 points

1) **a.** Pour tout réel x, avec $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:

$$f(x) = 9(x-2)^2 - 4 = 9\left(x^2 - 4x + 4\right) - 4 = 9x^2 - 36x + 36 - 4 = \boxed{9x^2 - 36x + 32}.$$

b. Pour tout réel x, on développe la forme (3) :

$$(3x-8)(3x-4) = 9x^2 - 12x - 24x + 32 = 9x^2 - 36x + 32 = f(x) \text{ d'après (2).}$$

Donc $\boxed{f(x) = (3x-8)(3x-4)}$ pour tout réel x.

Autre méthode : à partir de (1), $f(x) = \big(3(x-2)\big)^2 - 2^2 = (3x-6-2)(3x-6+2) = (3x-8)(3x-4)$.

2) **a.** On utilise la forme (1) :

$$f(x) = -4 \iff 9(x-2)^2 - 4 = -4 \iff 9(x-2)^2 = 0 \iff x-2 = 0 \iff x = 2.$$

$\boxed{S = \{2\}}$.

b. On utilise la forme factorisée (3) et la règle du produit nul :

$$f(x) = 0 \iff (3x-8)(3x-4) = 0 \iff 3x-8 = 0 \text{ ou } 3x-4 = 0 \iff x = \frac{8}{3} \text{ ou } x = \frac{4}{3}.$$

$\boxed{S = \left\{\frac{4}{3}\,;\,\frac{8}{3}\right\}}$.

c. On utilise la forme développée (2) :

$$\begin{aligned} f(x) = 32 &\iff 9x^2 - 36x + 32 = 32 \iff 9x^2 - 36x = 0 \\ &\iff 9x(x-4) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 4. \end{aligned}$$

$\boxed{S = \{0\,;\,4\}}$.

Exercice 6

2 points

On note $n-1$, n et $n+1$ trois entiers consécutifs (n est l'entier du milieu). La somme de leurs carrés vaut :

$$(n-1)^2+n^2+(n+1)^2=n^2-2n+1+n^2+n^2+2n+1=3n^2+2.$$

On résout :

$$3n^2+2=4\,802 \iff 3n^2=4\,800 \iff n^2=1\,600 \iff n=40 \text{ ou } n=-40.$$

Les trois entiers cherchés sont donc $\boxed{39,\ 40 \text{ et } 41}$, ou bien $\boxed{-41,\ -40 \text{ et } -39}$.

Vérification : $39^2+40^2+41^2=1\,521+1\,600+1\,681=4\,802$.