Exercice 1

4 points

1) Calcul de A. On fait apparaître des carrés parfaits : $112 = 16 \times 7$ et $28 = 4 \times 7$, donc

$$\sqrt{112} = \sqrt{16} \times \sqrt{7} = 4\sqrt{7} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{28} = \sqrt{4} \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7}.$$

$$A = 3 \times 4\sqrt{7} - 2\sqrt{7} + 5 \times 2\sqrt{7} = 12\sqrt{7} - 2\sqrt{7} + 10\sqrt{7} = (12 - 2 + 10)\sqrt{7}, \qquad \boxed{A = 20\sqrt{7}}.$$

Calcul de B. On réduit au même dénominateur $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$:

$$B = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{\sqrt{3} \times \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{6}} - \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

On rend le dénominateur entier en multipliant en haut et en bas par $\sqrt{6}$:

$$B = \frac{1 \times \sqrt{6}}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}}, \qquad \boxed{B = \frac{\sqrt{6}}{6}}.$$

2) On développe par double distributivité :

$$\begin{aligned} C &= \frac{3}{7} \times 7x - \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} + 2x \times 7x - 2x \times \frac{1}{3} \\ &= 3x - \frac{1}{7} + 14x^2 - \frac{2}{3}x \\ &= 14x^2 + \left(\frac{9}{3} - \frac{2}{3}\right)x - \frac{1}{7}, \end{aligned}$$

$$\boxed{C = 14x^2 + \frac{7}{3}x - \frac{1}{7}}.$$

3) Le facteur commun est $(x+1)$, car $(x+1)^2 = (x+1)(x+1)$:

$$\begin{aligned} D &= (x+1)(1-2x) + (x+1)(x+1) \\ &= (x+1)\big[(1-2x) + (x+1)\big] \\ &= (x+1)(1-2x+x+1), \end{aligned}$$

$$\boxed{D = (x+1)(2-x)}.$$

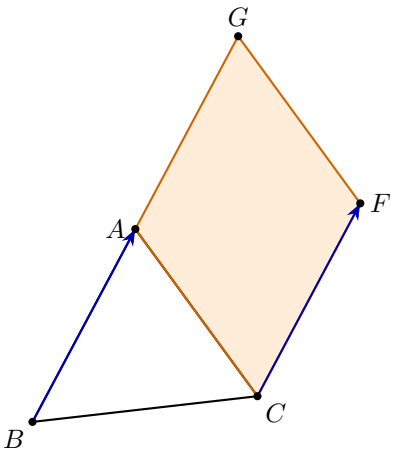
4) Pour montrer qu'une propriété n'est pas vraie pour tous les réels positifs, il suffit de trouver **un contre-exemple**.
Prenons $a = 9$ et $b = 16$:

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \qquad \text{et} \qquad \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7.$$

Comme $5 \neq 7$, on a $\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$: l'égalité $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ n'est pas toujours vraie.
Remarque : elle est vraie lorsque $a = 0$ ou $b = 0$, mais fausse dès que $a > 0$ et $b > 0$.

Exercice 2

3 points



1) F est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$, donc $\boxed{\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BA}}$ (autrement dit, $BAFC$ est un parallélogramme).

2) G est le symétrique de B par rapport à A, donc A est le milieu de $[BG]$ et $\boxed{\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BA}}$.

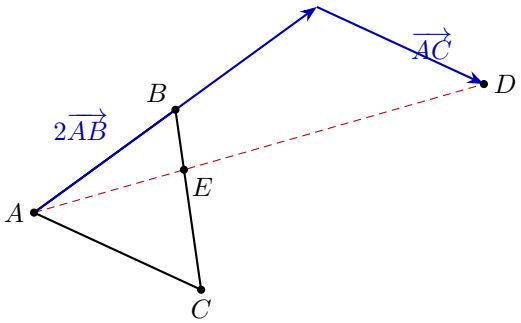
3) Des deux égalités précédentes on déduit $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{CF}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{FC}$.
Or $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{FC}$ si et seulement si $GACF$ est un parallélogramme (éventuellement aplati). Le triangle ABC n'étant pas aplati, C n'est pas sur la droite $(AG) = (AB)$, donc

$\boxed{GACF \text{ est un parallélogramme.}}$

Exercice 3

5 points

1) **Construction.** Pour D, on trace à partir de A le vecteur $2\overrightarrow{AB}$, puis, à son extrémité, le vecteur $\overrightarrow{AC}$. Pour E, on place sur $[BC]$ le point situé au tiers de $[BC]$ en partant de B.



2) On décompose $\overrightarrow{AE}$ avec la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}\\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) \qquad \text{(Chasles)}\\ &= \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC},\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}}.$$

3) On multiplie l'égalité précédente par 3 :

$$3\overrightarrow{AE} = 3 \times \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + 3 \times \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.$$

Ainsi $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AE}$: les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires. Les droites (AD) et (AE) sont donc parallèles; comme elles ont le point A en commun, elles sont confondues, et $\boxed{A,\ D \text{ et } E \text{ sont alignés.}}$

Exercice 4

8 points

1) Le panneau est formé du triangle CAF et du rectangle situé sous $[DE]$.

- **Triangle** CAF : base $CF = 2$ et hauteur $AB = 2x$, donc son aire vaut $\dfrac{2 \times 2x}{2} = 2x$.
- **Rectangle** : sa largeur est $DE = CF - CD - EF = 2 - 2x$ et sa hauteur est $2 - AB = 2 - 2x$, donc son aire vaut

$$(2 - 2x)(2 - 2x) = 4 - 4x - 4x + 4x^2 = 4x^2 - 8x + 4.$$

En additionnant : $f(x) = 2x + 4x^2 - 8x + 4$, soit $\boxed{f(x) = 4x^2 - 6x + 4}$.

2) Avec le menu « tableau de valeurs » de la calculatrice (les valeurs tombent juste, sans arrondi) :

x	0	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	0,9	1
$f(x)$	4	3,44	2,96	2,56	2	1,76	1,84	2

Par exemple $f(0{,}3) = 4 \times 0{,}09 - 6 \times 0{,}3 + 4 = 0{,}36 - 1{,}8 + 4 = 2{,}56$.

3) **a.** On trace la droite d'équation $y = 3$: elle coupe la courbe en un seul point, d'abscisse proche de $0{,}2$, donc $\boxed{x \approx 0{,}2}$.

b. Le tableau donne $f(0{,}1) = 3{,}44 > 3$ et $f(0{,}2) = 2{,}96 < 3$. On affine avec un tableau de pas $0{,}001$:

$$f(0{,}190) \approx 3{,}0044 > 3 \qquad f(0{,}191) \approx 2{,}9999 < 3 \qquad f(0{,}192) \approx 2{,}9955 < 3.$$

$f(0{,}191)$ est la valeur la plus proche de 3, d'où $\boxed{x \approx 0{,}191}$ au millième près.

4) D'après le tableau, $f(0{,}9) = 1{,}84$ et la courbe descend jusque vers $x = 0{,}75$ avant de remonter : il y a une autre valeur, avant $0{,}75$, où $f(x) = 1{,}84$. Avec un tableau de pas $0{,}01$:

$$f(0{,}59) = 1{,}8524 > 1{,}84 \qquad f(0{,}60) = 1{,}84 \qquad f(0{,}61) = 1{,}8284 < 1{,}84,$$

$$f(0{,}89) = 1{,}8284 < 1{,}84 \qquad f(0{,}90) = 1{,}84 \qquad f(0{,}91) = 1{,}8524 > 1{,}84.$$

L'aire est strictement inférieure à $1{,}84$ m^2 entre ces deux valeurs, bornes exclues :

$$\boxed{S =]0{,}6\,;\,0{,}9[}.$$

Vérification : $f(x) - 1{,}84 = 4x^2 - 6x + 2{,}16 = 4(x - 0{,}6)(x - 0{,}9)$, qui est négatif entre ses racines $0{,}6$ et $0{,}9$.