Exercice 1

5 points

1) On fait apparaître dans chaque radicande un carré parfait, puis on utilise $\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$ pour $a \geqslant 0, b \geqslant 0$:

$$\sqrt{810} = \sqrt{81 \times 10} = 9\sqrt{10} \qquad \sqrt{360} = \sqrt{36 \times 10} = 6\sqrt{10} \qquad \sqrt{160} = \sqrt{16 \times 10} = 4\sqrt{10}.$$

Donc

$$A = -4 \times 9\sqrt{10} - 5 \times 6\sqrt{10} + 6 \times 4\sqrt{10} = -36\sqrt{10} - 30\sqrt{10} + 24\sqrt{10} = (-36 - 30 + 24)\sqrt{10},$$

$$\boxed{A = -42\sqrt{10}}.$$

2) **Le produit** (double distributivité), avec $\left(\sqrt{6}\right)^2 = 6$:

$$\left(4\sqrt{6} - 7\right)\left(5 - \sqrt{6}\right) = 20\sqrt{6} - 4 \times 6 - 35 + 7\sqrt{6} = 27\sqrt{6} - 59.$$

Le carré (identité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$), avec $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$:

$$\left(5\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\right)^2 = 25 \times 2 + 2 \times 5\sqrt{2} \times 2\sqrt{3} + 4 \times 3 = 50 + 20\sqrt{6} + 12 = 62 + 20\sqrt{6}.$$

La différence (attention aux parenthèses) :

$$B = 27\sqrt{6} - 59 - \left(62 + 20\sqrt{6}\right) = 27\sqrt{6} - 59 - 62 - 20\sqrt{6},$$

$$\boxed{B = 7\sqrt{6} - 121}.$$

Exercice 2

3 points

Expression C**.** On reconnaît une différence de deux carrés, car $4(5x+1)^2 = [2(5x+1)]^2 = (10x+2)^2$. Avec $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

$$\begin{aligned} C &= (3x-1)^2 - (10x+2)^2 \\ &= \big[(3x-1) - (10x+2)\big]\big[(3x-1) + (10x+2)\big] \\ &= (3x - 1 - 10x - 2)(3x - 1 + 10x + 2), \end{aligned}$$

$$\boxed{C = (-7x-3)(13x+1)}.$$

Expression D**.** Le facteur commun est $(3x-1)$, car $(3x-1)^2 = (3x-1)(3x-1)$:

$$\begin{aligned} D &= (3x-1)(2x-9) - (3x-1)(3x-1) \\ &= (3x-1)\big[(2x-9) - (3x-1)\big] \\ &= (3x-1)(2x - 9 - 3x + 1), \end{aligned}$$

$$\boxed{D = (3x-1)(-x-8)}.$$

Exercice 3

4 points

1) On étudie le signe de chaque facteur affine.

- $8x - 16 = 0 \iff x = 2$; le coefficient 8 est positif, donc $8x - 16$ est négatif avant 2 et positif après.
- $-2x + 2 = 0 \iff x = 1$; le coefficient -2 est négatif, donc $-2x + 2$ est positif avant 1 et négatif après.

On applique la règle des signes d'un produit :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$8x - 16$		$-$		$-$	0	$+$	
$-2x + 2$		$+$	0	$-$		$-$	
$(8x - 16)(-2x + 2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2) On se ramène à une comparaison avec 0 :

$$(3x - 7)^2 < (5x - 9)^2 \iff (3x - 7)^2 - (5x - 9)^2 < 0.$$

On factorise avec $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$:

$$\begin{aligned}(3x - 7)^2 - (5x - 9)^2 &= \big[(3x - 7) - (5x - 9)\big]\big[(3x - 7) + (5x - 9)\big] \\ &= (3x - 7 - 5x + 9)(3x - 7 + 5x - 9) \\ &= (-2x + 2)(8x - 16).\end{aligned}$$

On retrouve le produit de la question 1). L'inéquation équivaut donc à $(8x - 16)(-2x + 2) < 0$ et, d'après le tableau de signes, ce produit est strictement négatif pour $x < 1$ ou $x > 2$:

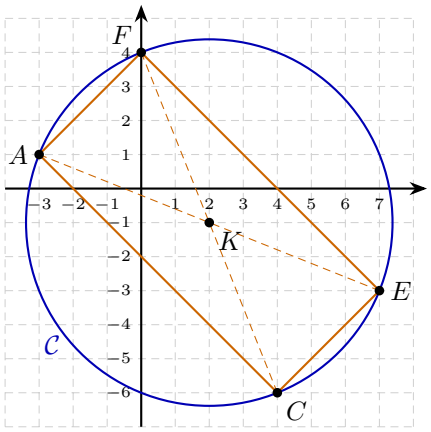
$$\boxed{S =]-\infty\,;\,1[\,\cup\,]2\,;\,+\infty[}.$$

Exercice 4

8 points

On rappelle que, pour deux points $P(x_P\,;\,y_P)$ et $Q(x_Q\,;\,y_Q)$:

- le milieu de $[PQ]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_P + x_Q}{2}\,;\,\dfrac{y_P + y_Q}{2}\right)$;
- dans un repère orthonormé, $PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$.



1) K est le milieu de $[CF]$ avec $C(4\,;\,-6)$ et $F(0\,;\,4)$:

$$x_K = \frac{4+0}{2} = 2 \qquad y_K = \frac{-6+4}{2} = -1, \qquad \text{donc } \boxed{K(2\,;\,-1)}.$$

2) Le rayon d'un cercle est la moitié de son diamètre. Le repère étant orthonormé :

$$CF = \sqrt{(0-4)^2 + (4-(-6))^2} = \sqrt{16+100} = \sqrt{116} = \sqrt{4\times 29} = 2\sqrt{29}.$$

Le rayon de $\mathcal{C}$ est donc $\dfrac{CF}{2} = \dfrac{2\sqrt{29}}{2}$, soit $\boxed{r = \sqrt{29}}$.

3) Le centre du cercle de diamètre $[CF]$ est le milieu K de $[CF]$. On calcule la distance KA :

$$KA = \sqrt{(-3-2)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}.$$

KA est égal au rayon, donc $\boxed{A \in \mathcal{C}}$.

4) E est le symétrique de A par rapport à K, donc K est le milieu de $[AE]$:

$$\frac{-3+x_E}{2} = 2 \iff x_E = 7 \qquad \frac{1+y_E}{2} = -1 \iff y_E = -3,$$

d'où $\boxed{E(7\,;\,-3)}$.

5)
- Les diagonales $[CF]$ et $[AE]$ du quadrilatère $CAFE$ ont le même milieu K (question 1 et définition de E) : $CAFE$ est un parallélogramme.
- A est sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre K (question 3) et K est le milieu de $[AE]$: $[AE]$ est donc aussi un diamètre de $\mathcal{C}$, et $AE = 2\sqrt{29} = CF$.

Un parallélogramme dont les diagonales ont la même longueur est un rectangle, donc

$\boxed{CAFE \text{ est un rectangle.}}$