Exercice 1

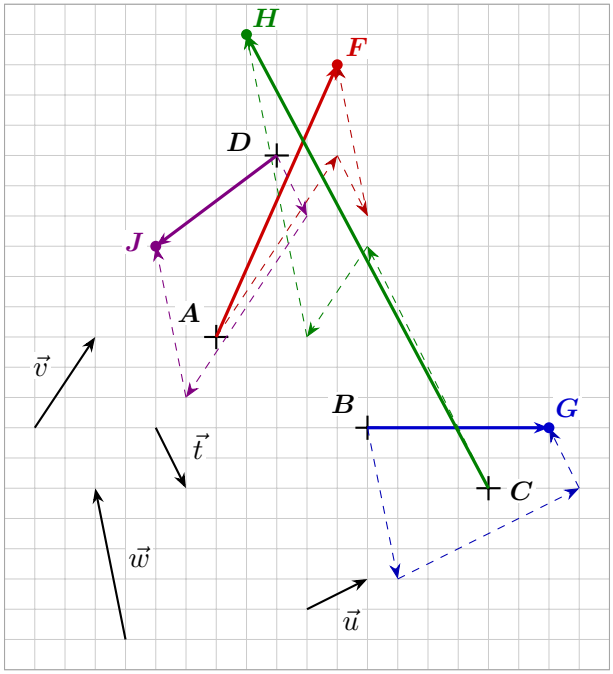
6 points

On prend pour unité le côté d'un carreau. En comptant les carreaux sur la figure (déplacement horizontal, puis vertical), on lit :

$$\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \qquad \vec{t}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}, \qquad \vec{w}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}, \qquad \vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

- $\overrightarrow{AF} = 2\vec{v} + \vec{t} + \vec{w}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}2\times 2 + 1 + (-1)\\2\times 3 + (-2) + 5\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix}}$.
  F s'obtient en partant de A, 4 carreaux vers la droite et 9 vers le haut.
- $\overrightarrow{BG} = -\vec{w} + 3\vec{u} - \vec{t}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1+6-1\\-5+3+2\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}}$.
  G s'obtient en partant de B, 6 carreaux vers la droite.
- $\overrightarrow{CH} = -4\vec{t} - \vec{v} + 2\vec{w}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-4-2-2\\8-3+10\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}-8\\15\end{pmatrix}}$.
  H s'obtient en partant de C, 8 carreaux vers la gauche et 15 vers le haut.
- $\overrightarrow{DJ} = \vec{t} - 2\vec{v} + \vec{w}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1-4-1\\-2-6+5\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}}$.
  J s'obtient en partant de D, 4 carreaux vers la gauche et 3 vers le bas.

On peut aussi construire chaque point en mettant les vecteurs « bout à bout » (relation de Chasles) : c'est ce que montrent les tracés en pointillés ci-dessous.



Exercice 2

5 points

1) On utilise les identités remarquables $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ et $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

$$A = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2} \times 6x + (6x)^2 = \frac{1}{4} - 6x + 36x^2, \qquad \boxed{A = 36x^2 - 6x + \frac{1}{4}}$$

$$B = 1 - \left((4y)^2 - 1^2\right) = 1 - (16y^2 - 1) = 1 - 16y^2 + 1, \qquad \boxed{B = -16y^2 + 2}$$

2) **a.** $(2x-3)(36x+11) = 0$ (définie sur $\mathbb{R}$). Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul :

$$2x - 3 = 0 \iff x = \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad 36x + 11 = 0 \iff x = -\frac{11}{36}. \qquad \boxed{S = \left\{-\frac{11}{36}\,;\,\frac{3}{2}\right\}}$$

b. $(9x+2)(4x^2-7) = 0$ (définie sur $\mathbb{R}$) :

$$9x + 2 = 0 \iff x = -\frac{2}{9} \quad \text{ou} \quad 4x^2 - 7 = 0 \iff x^2 = \frac{7}{4} \iff x = \frac{\sqrt{7}}{2} \text{ ou } x = -\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

$$\boxed{S = \left\{-\frac{\sqrt{7}}{2}\,;\,-\frac{2}{9}\,;\,\frac{\sqrt{7}}{2}\right\}}$$

(On peut aussi factoriser $4x^2 - 7 = (2x - \sqrt{7})(2x + \sqrt{7})$.)

c. $\dfrac{16x^2 - 2}{x} = 0$ est définie pour $x \neq 0$, donc sur $\mathbb{R}^*$. Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul et son dénominateur non nul :

$$16x^2 - 2 = 0 \iff x^2 = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \iff x = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ ou } x = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ces deux valeurs sont non nulles, donc acceptées : $\boxed{S = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{4}\,;\,\frac{\sqrt{2}}{4}\right\}}$ $\left(\frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}354\right)$.

d. $\dfrac{4x^2 + 8x + 4}{x + 2} = 0$ est définie pour $x + 2 \neq 0$, soit sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Le numérateur se factorise :

$$4x^2 + 8x + 4 = 4(x^2 + 2x + 1) = 4(x+1)^2.$$

$$4(x+1)^2 = 0 \iff x + 1 = 0 \iff x = -1.$$

Or $-1 \neq -2$, donc la valeur est acceptée : $\boxed{S = \{-1\}}$.

Exercice 3

5 points

1) f est affine : son coefficient directeur est égal au taux d'accroissement entre deux valeurs quelconques, par exemple -3 et -1 :

$$a = \frac{f(-1) - f(-3)}{-1 - (-3)} = \frac{4 - 2}{2} = \boxed{1}.$$

2) $f(x) = ax + b$ avec $a = 1$, donc $f(x) = x + b$. Comme $f(0) = b$ et $f(0) = 5$, on a $b = 5$: $\boxed{f(x) = x + 5}$.
Vérification : $f(-3) = -3 + 5 = 2$ et $f(-1) = -1 + 5 = 4$.

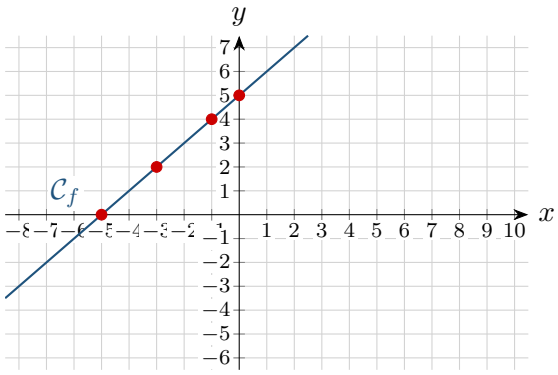
3) On calcule $f(x) = x + 5$ pour chaque valeur :

x	-1	-3	0	5	10
$f(x)$	4	2	5	10	15

4) Le coefficient directeur $a = 1$ est strictement positif, donc f est croissante sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[-3\,;\,-1]$, avec $f(-3) = 2$ et $f(-1) = 4$:

x	-3	-1
$f(x)$	2	$\nearrow$ 4

5) $\mathcal{C}_f$ est une droite : deux points suffisent. On utilise par exemple les points $(-3\,;\,2)$ et $(0\,;\,5)$ du tableau ; on vérifie avec $(-1\,;\,4)$ et $(-5\,;\,0)$ (car $f(-5) = 0$).



Exercice 4

4 points

$ABCD$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, et, par la règle du parallélogramme, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

1) Par la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \boxed{\overrightarrow{AC}}$.

2) $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AD}$, donc $2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} = \boxed{\overrightarrow{AD}}\ (= \overrightarrow{BC})$.

3) On a $-\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, $-\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, donc

$$\begin{aligned} -\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \\ &= 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \\ &= 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = \boxed{\overrightarrow{AC}}. \end{aligned}$$