Exercice 1

4 points

On utilise la relation de Chasles $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}$ et $-\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{YX}$.

a. On décompose $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ en passant par C :

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB}.$$

Donc

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB},$$

soit $\boxed{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}$.

b. On écrit les vecteurs précédés d'un signe moins dans l'autre sens : $-\overrightarrow{D\ldots} = \overrightarrow{\ldots D}$ et $-\overrightarrow{\ldots C} = \overrightarrow{C\ldots}$. Il faut donc

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{C\ldots} + \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LM} + \overrightarrow{\ldots D}.$$

Pour que les lettres s'enchaînent, le chemin doit être $C \to K \to L \to M \to D$:

$$\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD}.$$

D'où $\boxed{\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{KL} - \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{LM}}$.

c. On exprime chaque vecteur à l'aide de $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}.$$

Donc

$$\vec{v} = 3\left(-\overrightarrow{BC}\right) + 2\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) + \overrightarrow{CA} = -3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA},$$

soit $\boxed{\vec{v} = 3\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC}}$.

d. On réordonne les termes pour enchaîner les lettres :

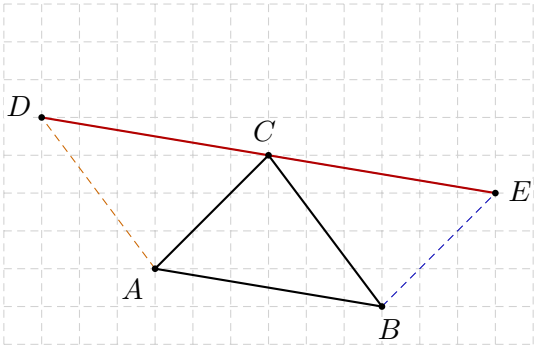
$$\vec{u} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SU} + \overrightarrow{UH} + \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{RU} + \overrightarrow{UH} + \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{RH} + \overrightarrow{HF},$$

soit $\boxed{\vec{u} = \overrightarrow{RF}}$.

Exercice 2

2 points

1) $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$: on reporte à partir de B le vecteur $\overrightarrow{AC}$ ($ACEB$ est un parallélogramme).
$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$: D est le point tel que $ABCD$ soit un parallélogramme ; on reporte à partir de C le vecteur $\overrightarrow{BA}$.



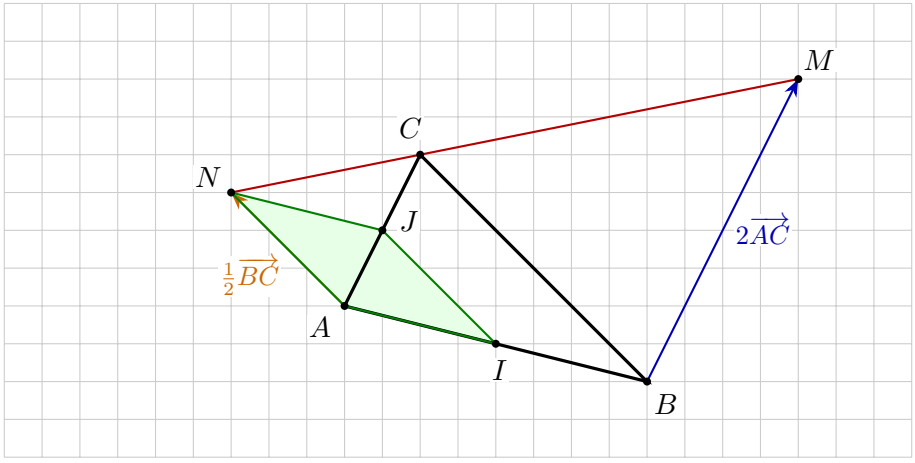
2) D'après la relation de Chasles et l'hypothèse $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}.$$

De plus $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$. Donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE}$.
Deux vecteurs égaux $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{CE}$ partageant le point C : les points D, C, E sont alignés et $DC = CE$.
Donc $\boxed{C \text{ est le milieu de } [ED].}$

Exercice 3

6 points



On peut lire sur le quadrillage (une unité par carreau, origine en bas à gauche) : $A(9\,;\,4)$, $B(17\,;\,2)$, $C(11\,;\,8)$.

1) $\overrightarrow{AC}$ correspond à un déplacement de 2 carreaux vers la droite et 4 vers le haut, donc $2\overrightarrow{AC}$ à 4 carreaux vers la droite et 8 vers le haut : on place M à partir de B (figure).
$\overrightarrow{BC}$ correspond à 6 carreaux vers la gauche et 6 vers le haut, donc $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ à 3 vers la gauche et 3 vers le haut : on place N à partir de A (figure).

2) On exprime $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC},$$

$$\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).$$

Donc $\overrightarrow{CM} = -2\overrightarrow{CN}$: les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CN}$ sont colinéaires et ont le point C en commun, donc $\boxed{C,\ M \text{ et } N \text{ sont alignés.}}$

Vérification sur le quadrillage : $M(21\,;\,10)$ et $N(6\,;\,7)$, donc $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}10\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CN}\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}$;

$$\det\left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CN}\right) = 10 \times (-1) - 2 \times (-5) = 0.$$

3) I est le milieu de $[AB]$, donc $\overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$; J est le milieu de $[AC]$, donc $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Ainsi

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

Donc $\boxed{\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}}$.

4) Par définition de N et d'après la question 3 :

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IJ}.$$

Or $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{IJ}$ signifie que $ANJI$ est un parallélogramme (éventuellement aplati). Les points A, N, I ne sont pas alignés (N n'est pas sur la droite (AB)), donc $\boxed{ANJI \text{ est un parallélogramme.}}$

Exercice 4 : Fonctions de référence

8 points

1) La fonction carré est décroissante sur $[-3\,;\,0]$ et croissante sur $[0\,;\,4]$.

- Si $-3 \leqslant b \leqslant 0$, alors $0 \leqslant b^2 \leqslant 9$ (l'ordre est inversé).
- Si $0 \leqslant b \leqslant 4$, alors $0 \leqslant b^2 \leqslant 16$.

Le minimum 0 est atteint pour $b = 0$ et le maximum 16 pour $b = 4$. Donc $\boxed{b^2 \in [0\,;\,16]}$.

2) $\frac{1}{c} < 0 \iff c < 0$: c est un entier strictement négatif.
Pour $c < 0$: $c^2 < 15 \iff -\sqrt{15} < c < 0$. Comme $3^2 = 9 < 15$ et $4^2 = 16 > 15$, on a $3 < \sqrt{15} < 4$.
Les entiers solutions sont donc $\boxed{c \in \{-3\,;\,-2\,;\,-1\}}$.

3) La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et $(-2)^3 = -8$, $3^3 = 27$:

$$-8 \leqslant a^3 \leqslant 27 \iff (-2)^3 \leqslant a^3 \leqslant 3^3 \iff -2 \leqslant a \leqslant 3.$$

L'ensemble cherché est $\boxed{[-2\,;\,3]}$.

4) La fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$: elle conserve l'ordre.

$$9 \leqslant x \leqslant 900 \implies \sqrt{9} \leqslant \sqrt{x} \leqslant \sqrt{900}, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{3 \leqslant p(x) \leqslant 30}.$$

5) **a.** La fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$: si $4 \leqslant x \leqslant 10$ alors $\boxed{2 \leqslant \sqrt{x} \leqslant \sqrt{10}}$.

b. $\dfrac{1}{x} \geqslant 4 > 0$, donc $x > 0$. La fonction inverse est décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$: elle inverse l'ordre. En prenant l'inverse :

$$4 \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 10 \iff \frac{1}{10} \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{0{,}1 \leqslant x \leqslant 0{,}25}.$$

6) **a.** **Faux.** L'image de -5 par la fonction inverse est $\dfrac{1}{-5} = -0{,}2 \neq -0{,}3$: le point $A(-5\,;\,-0{,}3)$ n'est pas sur la courbe.

b. **Faux.** f est définie pour $x \neq 0$. Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul ; or, pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$, donc $x^2 + 12 \geqslant 12 > 0$. Le numérateur n'est jamais nul : $f(x)$ ne peut pas être égal à zéro.