Exercice 1 : Encore un coup de Chasles

5 points

On utilise la relation de Chasles $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}$ et $-\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{YX}$.

1) $-\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB}$ et $-\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA}$, donc on réordonne pour enchaîner les lettres :

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0} + \overrightarrow{AB}.$$

Donc $\boxed{\vec{v} = \overrightarrow{AB}}$.

2) On range les vecteurs connus pour enchaîner les lettres en partant de A :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{\cdots\cdots} + \overrightarrow{RT} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{\cdots\cdots} + \overrightarrow{RT}.$$

Pour arriver à $\overrightarrow{AT}$, il faut passer de S à R : $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{RT} = \overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RT} = \overrightarrow{AT}$.
Le vecteur manquant est $\boxed{\overrightarrow{SR}}$: $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{AB}$.

3) On exprime chaque vecteur à l'aide de $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$:

$$\overrightarrow{FE} = -\overrightarrow{EF} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EG} = -\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG}.$$

Donc

$$\vec{u} = 2\left(-\overrightarrow{EF}\right) - \overrightarrow{EG} + 4\left(-\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG}\right) = -2\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{EG} - 4\overrightarrow{EF} + 4\overrightarrow{EG},$$

soit $\boxed{\vec{u} = -6\overrightarrow{EF} + 3\overrightarrow{EG}}$.

4) Soit O, A, B et C quatre points quelconques. Comme $-\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BO}$:

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}.$$

Donc $\boxed{\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}}$ pour tous points O, A, B, C.

5) On regroupe les vecteurs deux par deux :

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BA} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{DC}.$$

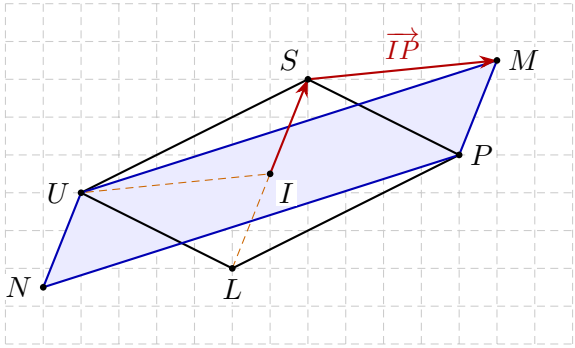
Donc $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}$.
Or $ABCD$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$. Ainsi

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB},$$

soit $\boxed{\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \vec{0}}$, quel que soit le point M.

Exercice 2 : Un parallélogramme de PLUS

5 points



1) $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{IP}$: on part de P, on va en S (vecteur $\overrightarrow{PS}$), puis on trace à partir de S un vecteur égal à $\overrightarrow{IP}$. Son extrémité est le point M (figure ci-dessus).

2) $LIUN$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{NU}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{UN} = \overrightarrow{IL}$: on place N en reportant à partir de U le vecteur $\overrightarrow{IL}$ (figure ci-dessus).

3) D'après la relation de Chasles, en changeant l'ordre des termes :

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{IP} = \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{IS}.$$

Donc $\boxed{\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{IS}}$.

Par construction, $LIUN$ est un parallélogramme, donc $\boxed{\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{NU}}$.

4) I est le centre du parallélogramme $PLUS$, donc le milieu de sa diagonale $[LS]$ (les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu). Ainsi $\overrightarrow{IS} = \overrightarrow{LI}$.
D'après la question 3 :

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{IS} = \overrightarrow{LI} = \overrightarrow{NU}, \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{NU}}.$$

Or $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{NU}$ signifie que $PMUN$ est un parallélogramme (éventuellement aplati). Ici les points P, M, U ne sont pas alignés, donc $\boxed{PMUN \text{ est un parallélogramme.}}$

Exercice 3 : Tu as la réf ?

10 points

1)

a. Faux. Contre-exemple : pour $x = -4$, $f(-4) = (-4)^2 = 16 \geqslant 9$, mais $-4 < 3$.
(En fait $f(x) \geqslant 9 \iff x \leqslant -3$ ou $x \geqslant 3$.)

b. Vrai. Le nombre 0 n'a pas d'antécédent par g : pour tout réel $x \neq 0$, $\dfrac{1}{x} \neq 0$ (un quotient est nul seulement si son numérateur est nul, et ici le numérateur vaut 1).

c. Vrai. Soit y un réel.

- Si $y < 0$, y n'a aucun antécédent par h, car une racine carrée est toujours positive.
- Si $y \geqslant 0$, $\sqrt{x} = y \iff x = y^2$: y a exactement un antécédent, y^2.

Dans tous les cas, y a au plus un antécédent par h (la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$).

d. **Vrai.** Pour tout réel x : $i(-x) = (-x)^3 = (-x)\times(-x)\times(-x) = -x^3 = -i(x)$.
(La fonction cube est impaire : sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.)

2) **a.** $x^2 = 49 \iff x = 7$ ou $x = -7$ (car $49 > 0$). $\boxed{S = \{-7\,;7\}}$.

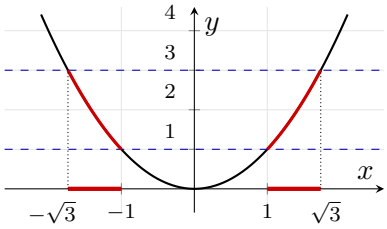
b. Pour $x \neq 0$: $\dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{2} \iff x = \dfrac{2}{3}$ (on prend l'inverse des deux membres). $\boxed{S = \left\{\dfrac{2}{3}\right\}}$.

c. Pour $x \geqslant 0$: $\sqrt{x} = \pi \iff x = \pi^2$ (car $\pi \geqslant 0$). $\boxed{S = \{\pi^2\}}$.

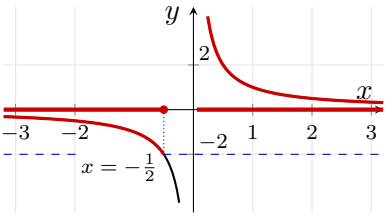
d. $x^3 = -27 \iff x = -3$, car $(-3)^3 = -27$ et la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (un seul antécédent). $\boxed{S = \{-3\}}$.

3) On trace la courbe de référence et la (ou les) droite(s) horizontale(s) ; les solutions sont les abscisses des points de la partie rouge de la courbe.

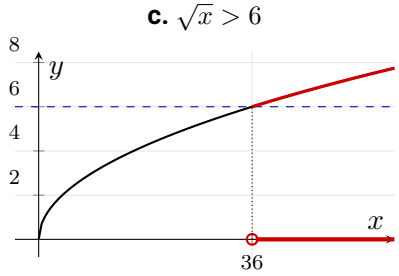
a. $1 \leqslant x^2 \leqslant 3$



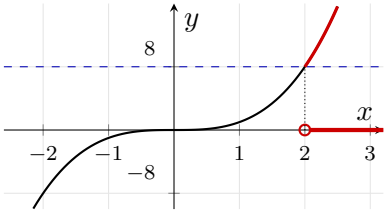
b. $\frac{1}{x} \geqslant -2$



c. $\sqrt{x} > 6$



d. $x^3 > 8$



a. La parabole est comprise entre les droites $y = 1$ et $y = 3$ pour x entre 1 et $\sqrt{3}$, et, par symétrie, entre $-\sqrt{3}$ et -1 (car $1^2 = 1$ et $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$). $\boxed{S = \left[-\sqrt{3}\,;-1\right] \cup \left[1\,;\sqrt{3}\right]}$.

b. La droite $y = -2$ coupe l'hyperbole au point d'abscisse $-\dfrac{1}{2}$ (car $\dfrac{1}{-1/2} = -2$). La courbe est au-dessus de cette droite pour $x \leqslant -\dfrac{1}{2}$ et sur tout $]0\,;+\infty[$ (où $\dfrac{1}{x} > 0 > -2$) ; 0 est exclu.
$\boxed{S = \left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right] \cup]0\,;+\infty[}$.

c. $\sqrt{36} = 6$ et la fonction racine carrée est croissante : la courbe est strictement au-dessus de la droite $y = 6$ pour $x > 36$. $\boxed{S =]36\,;+\infty[}$.

d. $2^3 = 8$ et la fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$: la courbe est strictement au-dessus de la droite $y = 8$ pour $x > 2$. $\boxed{S =]2\,;+\infty[}$.