Exercice 1

2 points

On lit les coordonnées des vecteurs en comptant les carreaux (déplacement horizontal ; déplacement vertical, vers le haut compté positivement) :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}14\\20\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-6\\-8\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}6\\-8\end{pmatrix}.$$

1) Faux. $6\times 20-8\times 14=120-112=8\neq 0$: les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires. Les deux directions sont proches mais différentes.

2) Faux. $\overrightarrow{IJ}=-\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{IJ}$ a la direction de $\overrightarrow{AB}$, qui n'est pas celle de $\overrightarrow{CD}$ (question 1) : $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{IJ}$ n'ont pas la même direction.

3) Vrai. $\|\overrightarrow{GH}\|=\sqrt{3^2+4^2}=5$ et $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{6^2+8^2}=10$ (en côtés de carreau), donc $\|\overrightarrow{GH}\|=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|$ (les vecteurs n'ont pas la même direction, mais l'affirmation ne porte que sur les normes).

4) Faux. $2\overrightarrow{EF}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}12\\-16\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}14\\20\end{pmatrix}$; d'ailleurs $\overrightarrow{EF}$ « descend » alors que $\overrightarrow{CD}$ « monte ».

Exercice 2

6 points

Méthode : on se ramène à un produit comparé à 0, puis on dresse un tableau de signes (un facteur $mx+p$ avec $m\neq 0$ change de signe en $-\frac{p}{m}$ et a le signe de m à droite de cette valeur).

a. $x+3=0\iff x=-3$ et $4x-1=0\iff x=\frac{1}{4}$.

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$4x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+3)(4x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le produit est strictement positif : $\boxed{S=]-\infty\,;\,-3[\,\cup\,\left]\frac{1}{4}\,;\,+\infty\right[}$.

b. On regroupe tout dans le membre de gauche et on factorise :

$$5x^2-3x\leqslant -6x\iff 5x^2+3x\leqslant 0\iff x(5x+3)\leqslant 0.$$

$x=0$ et $5x+3=0\iff x=-\frac{3}{5}$.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{5}$		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$5x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x(5x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le produit est négatif ou nul : $\boxed{S = \left[-\frac{3}{5}\,;\,0\right]}$.

c. $-3 < 0$; $4x - 12 = 0 \iff x = 3$ et $x + 2 = 0 \iff x = -2$.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
-3		$-$		$-$		$-$	
$4x-12$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$-3(4x-12)(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Le produit est positif ou nul : $\boxed{S = [-2\,;\,3]}$.

d. On factorise par $(7x-4)$:

$$(3x+10)(7x-4)+(7x-4)\left(\frac{3}{2}x+\frac{1}{3}\right) = (7x-4)\left(3x+10+\frac{3}{2}x+\frac{1}{3}\right) = (7x-4)\left(\frac{9}{2}x+\frac{31}{3}\right).$$

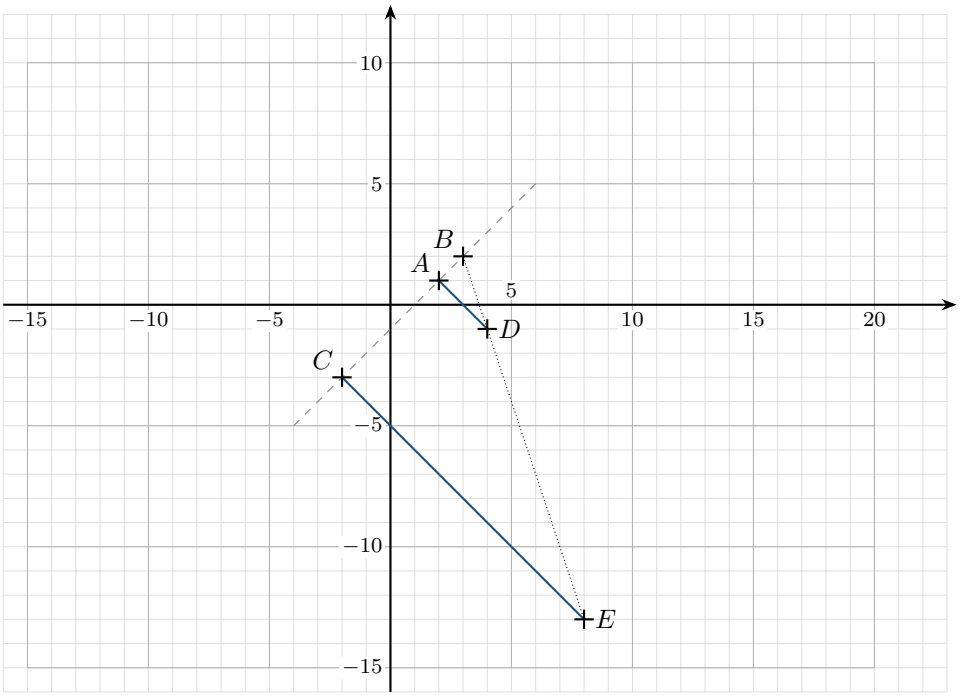
$7x-4=0 \iff x=\frac{4}{7}$ et $\frac{9}{2}x+\frac{31}{3}=0 \iff x=-\frac{31}{3}\times\frac{2}{9} \iff x=-\frac{62}{27}$ (environ $-2{,}30$).

x	$-\infty$		$-\frac{62}{27}$		$\frac{4}{7}$		$+\infty$
$\frac{9}{2}x+\frac{31}{3}$		$-$	0	$+$		$+$	
$7x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le produit est strictement négatif : $\boxed{S = \left]-\frac{62}{27}\,;\,\frac{4}{7}\right[}$.

Exercice 3

5 points



1) **a.** Voir la figure ci-dessus.

b. Les points A, B et C semblent **alignés**.

c. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-2\\2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2-2\\-3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix}$.

$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=1\times(-4)-1\times(-4)=0$ (autrement dit $\overrightarrow{AC}=-4\overrightarrow{AB}$) : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, donc $\boxed{A,\ B \text{ et } C \text{ sont alignés.}}$

2) Par lecture graphique : $\boxed{D(4\,;\,-1)}$.

3) $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}4-3\\-1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$, donc $5\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}5\\-15\end{pmatrix}$. Avec $E(x_E\,;\,y_E)$:

$$\overrightarrow{BE}=5\overrightarrow{BD}\iff\begin{cases}x_E-3=5\\y_E-2=-15\end{cases}\iff\begin{cases}x_E=8\\y_E=-13\end{cases}\quad\text{donc}\quad\boxed{E(8\,;\,-13)}.$$

4) $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}4-2\\-1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}8-(-2)\\-13-(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-10\end{pmatrix}$.

$\det\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CE}\right)=2\times(-10)-(-2)\times10=-20+20=0$ (autrement dit $\overrightarrow{CE}=5\overrightarrow{AD}$) : les vecteurs sont colinéaires, donc $\boxed{(AD)\parallel(CE)}$.

Exercice 4

7 points

1) Dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$:

$$\boxed{A(0\,;\,0)},\quad \boxed{B(1\,;\,0)},\quad \boxed{D(0\,;\,1)},\quad \boxed{O\left(\tfrac{1}{2}\,;\,\tfrac{1}{2}\right)},\quad \boxed{J\left(\tfrac{1}{2}\,;\,0\right)},\quad \boxed{C(1\,;\,1)}.$$

2) I est le milieu de $[DO]$, donc

$$x_I = \frac{x_D + x_O}{2} = \frac{0+\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad y_I = \frac{y_D + y_O}{2} = \frac{1+\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4},$$

d'où $\boxed{I\left(\frac{1}{4}\,;\,\frac{3}{4}\right)}$.

3) **a.**

$$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\\ 0-\frac{3}{4}\end{pmatrix} \text{ soit } \boxed{\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ -\frac{3}{4}\end{pmatrix}}; \qquad \overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}1-\frac{1}{4}\\ 1-\frac{3}{4}\end{pmatrix} \text{ soit } \boxed{\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}};$$

$$\overrightarrow{JC}\begin{pmatrix}1-\frac{1}{2}\\ 1-0\end{pmatrix} \text{ soit } \boxed{\overrightarrow{JC}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}}.$$

b. Le repère est orthonormé :

$$IJ = \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \left(-\tfrac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{16}+\tfrac{9}{16}} = \sqrt{\tfrac{10}{16}} \quad \text{donc} \quad \boxed{IJ = \frac{\sqrt{10}}{4} \approx 0{,}79}$$

$$IC = \sqrt{\left(\tfrac{3}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{10}{16}} \quad \text{donc} \quad \boxed{IC = \frac{\sqrt{10}}{4} \approx 0{,}79}$$

$$JC = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\tfrac{5}{4}} \quad \text{donc} \quad \boxed{JC = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}12}$$

c. Le plus grand côté est $[JC]$. On compare :

$$IJ^2 + IC^2 = \frac{10}{16} + \frac{10}{16} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4} \qquad \text{et} \qquad JC^2 = \frac{5}{4}.$$

$IJ^2 + IC^2 = JC^2$: d'après la réciproque du théorème de Pythagore,

$$\boxed{\text{le triangle } IJC \text{ est rectangle en } I}$$

(et même isocèle en I, car $IJ = IC$).

4) Le triangle IJC est rectangle en I, donc son aire vaut

$$\mathcal{A}_{IJC} = \frac{IJ \times IC}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{10}}{4} \times \frac{\sqrt{10}}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{10}{16} = \frac{5}{16} = 0{,}3125.$$

L'aire du carré $ABCD$ vaut $1 \times 1 = 1$ (unité d'aire du repère), et sa moitié vaut $\frac{1}{2} = \frac{8}{16}$. Comme

$\frac{5}{16} < \frac{8}{16}$: Non, l'aire du triangle IJC est **inférieure** à la moitié de celle du carré.

5) J et O ont la même abscisse $\frac{1}{2}$: la droite (JO) est la droite verticale d'équation $x = \frac{1}{2}$. Donc $K\left(\frac{1}{2}\,;\,y\right)$.

K est sur (IC), donc $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ y-\frac{3}{4}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}$ sont colinéaires :

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}-\left(y-\frac{3}{4}\right)\times\frac{3}{4}=0 \iff \frac{3}{4}\left(y-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{16} \iff y-\frac{3}{4}=\frac{1}{12} \iff y=\frac{9}{12}+\frac{1}{12}=\frac{10}{12}.$$

Donc $\boxed{K\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{5}{6}\right)}$.