Exercice 1

4 points

1) Le triangle ABJ est rectangle en B (car $J \in [BC]$ et ABC est rectangle en B). D'après le théorème de Pythagore :

$$AJ^2 = AB^2 + BJ^2 \iff BJ^2 = AJ^2 - AB^2 = 7^2 - 5^2 = 49 - 25 \iff \boxed{BJ^2 = 24}.$$

Le triangle ABC est rectangle en B. D'après le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \iff BC^2 = AC^2 - AB^2 = 11^2 - 5^2 = 121 - 25 \iff \boxed{BC^2 = 96}.$$

On remarque que $96 = 4 \times 24$, c'est-à-dire $BC^2 = 4\,BJ^2 = (2\,BJ)^2$. Les longueurs étant positives, $\boxed{BC = 2\,BJ}$: comme J est sur le segment $[BC]$, J **est le milieu de** $[BC]$.
(En valeurs exactes : $BJ = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ et $BC = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$.)

2) D'après le codage de la figure, I est le milieu de $[AC]$ ($AI = IC = 5{,}5$), et d'après la question 1), J est le milieu de $[BC]$.
Dans le triangle ABC, la droite (IJ) passe par les milieux de deux côtés : d'après le théorème des milieux, elle est parallèle au troisième côté.

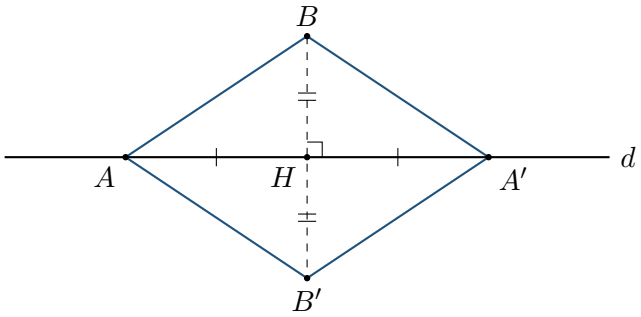
$$\boxed{(IJ) \parallel (AB)}$$

Autre méthode (réciproque du théorème de Thalès) : C, I, A et C, J, B sont alignés dans le même ordre et $\dfrac{CI}{CA} = \dfrac{5{,}5}{11} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{CJ}{CB}$, donc $(IJ) \parallel (AB)$.

Exercice 2

3 points

1) Figure :



2) A' est le symétrique de A par rapport à H, donc H est le milieu de $[AA']$; B' est le symétrique de B par rapport à H, donc H est le milieu de $[BB']$.
Les diagonales $[AA']$ et $[BB']$ du quadrilatère $ABA'B'$ ont le même milieu H : $ABA'B'$ **est un parallélogramme**.
De plus, A et A' sont sur d (le symétrique d'un point de d par rapport à un point de d est sur d), donc $(AA') = d$; et H est le projeté orthogonal de B sur d, donc $(BH) \perp d$, c'est-à-dire $(BB') \perp (AA')$.

Un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange :

$$\boxed{ABA'B' \text{ est un losange.}}$$

(On suppose $A \neq H$; sinon les points A, H et A' sont confondus et la figure est aplatie.)

Exercice 3

5 points

1) $BDEF$ est un carré, donc $(DE) \perp (BD)$, c'est-à-dire $(DE) \perp (BC)$. Le triangle ABC est rectangle en B, donc $(AB) \perp (BC)$.
Deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles : $\boxed{(DE) \parallel (AB)}$.

2) Dans le triangle ABC : $D \in [CB]$, $E \in [CA]$ et $(DE) \parallel (AB)$. D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{CD}{CB} = \frac{CE}{CA} = \frac{DE}{BA}.$$

Or $DE = a$, $BA = 3$, $CB = 7$ et $CD = CB - BD = 7 - a$. Donc

$$\frac{7-a}{7} = \frac{a}{3} \iff 3(7-a) = 7a \iff \frac{a}{7-a} = \frac{3}{7}$$

(on divise les deux membres de $7a = 3(7-a)$ par $7(7-a) \neq 0$, car $a < 7$). Donc a vérifie bien $\boxed{\frac{a}{7-a} = \frac{3}{7}}$.

3) Comme $7 - a \neq 0$:

$$\frac{a}{7-a} = \frac{3}{7} \iff 7a = 3(7-a) \iff 7a = 21 - 3a \iff 10a = 21 \iff \boxed{a = 2{,}1}.$$

L'aire du carré $BDEF$ vaut $a^2 = 2{,}1^2$, soit $\boxed{\mathcal{A} = 4{,}41}$ (unité d'aire).

Exercice 4

8 points

1) On met au même dénominateur, on multiplie les numérateurs entre eux, et on multiplie par l'inverse du dénominateur.

$$A = 2x + \frac{x-1}{7} = \frac{14x}{7} + \frac{x-1}{7} = \frac{14x + x - 1}{7} \quad \text{donc} \quad \boxed{A = \frac{15x-1}{7}}$$

$$B = \frac{-2}{3} \times \frac{x-1}{7} = \frac{-2(x-1)}{3 \times 7} \quad \text{donc} \quad \boxed{B = \frac{-2x+2}{21}}$$

$$C = \frac{-2}{7} \times \frac{4}{x-1} = \frac{-8}{7(x-1)} \quad \text{donc} \quad \boxed{C = \frac{-8}{7x-7}}$$

(possible car $x \neq 1$, donc $x - 1 \neq 0$).

2) On utilise $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} = a^n \times b^{-n}$ et $b^m \times b^p = b^{m+p}$:

$$D = \frac{a^4}{b^4} \times b^3 = a^4 \times b^{-4} \times b^3 = a^4 \times b^{-4+3} \quad \text{donc} \quad \boxed{D = a^4 \times b^{-1}}$$

3) On utilise $(a^m)^p = a^{mp}$, $a^m \times a^p = a^{m+p}$ et $\frac{a^m}{a^p} = a^{m-p}$:

$$E = a^{4n} \times a^{n+4} = a^{4n+n+4} \quad \text{donc} \quad \boxed{E = a^{5n+4}}$$

$$F = \frac{a^{1+3n}}{a^{2n+2}} = a^{1+3n-(2n+2)} = a^{1+3n-2n-2} \quad \text{donc} \quad \boxed{F = a^{n-1}}$$