Exercice 1

6 points

On travaille avec $x \neq 0$ et $x \neq -1$ pour l'expression A (dénominateurs non nuls) ; B est définie pour tout réel x.

Affirmation 1. On réduit au même dénominateur $x(x+1)$:

$$A = \frac{(x-1)(x+1)}{x(x+1)} - \frac{(x-1)\,x}{x(x+1)} = \frac{(x-1)\big[(x+1)-x\big]}{x(x+1)} = \frac{(x-1)\times 1}{x(x+1)} = \frac{x-1}{x(x+1)}.$$

L'affirmation 1 est $\boxed{\text{VRAIE}}$.

Affirmation 2. $(x+1)(1-x) = (1+x)(1-x) = 1-x^2$, donc

$$B = (x^2+2x+1) - (1-x^2) = x^2+2x+1-1+x^2 = \boxed{2x^2+2x}.$$

Ce n'est pas $2x^2+2x+2$ (par exemple pour $x=0$: $B=0$ alors que $2x^2+2x+2=2$). L'affirmation 2 est $\boxed{\text{FAUSSE}}$.

Affirmation 3. On met $(x+1)$ en facteur :

$$B = (x+1)\big[(x+1)-(1-x)\big] = (x+1)(x+1-1+x) = (x+1)\times 2x = 2x(x+1).$$

(On retrouve bien $2x(x+1) = 2x^2+2x$.) L'affirmation 3 est $\boxed{\text{VRAIE}}$.

Affirmation 4. Avec la forme développée et $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$:

$$B = 2\left(\sqrt{2}\right)^2 + 2\sqrt{2} = 2\times 2 + 2\sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{2}.$$

L'affirmation 4 est $\boxed{\text{VRAIE}}$.

Exercice 2

5 points

a. C et D sont sur le cercle $\mathcal{C}'$, donc $OC = OD = r$. Les triangles OAC et OAD sont rectangles en A (A est le pied de la perpendiculaire à (BE) issue de O). Par le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = OC^2 - OA^2 = r^2 - h^2 \qquad \text{et} \qquad AD^2 = OD^2 - OA^2 = r^2 - h^2.$$

Donc $AC^2 = AD^2$, d'où $AC = AD$ (longueurs positives). Comme A appartient au segment $[CD]$, $\boxed{A \text{ est le milieu de } [CD].}$

(Autre rédaction : le triangle OCD est isocèle en O, donc sa hauteur issue de O est aussi sa médiane.)

b. A est le milieu de $[CD]$ et $CD = x$, donc $AC = \dfrac{x}{2} = 0{,}5x$. Dans le triangle OAC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore :

$$OC^2 = OA^2 + AC^2 \iff r^2 = h^2 + (0{,}5x)^2 \iff \boxed{r^2 = h^2 + 0{,}25x^2}.$$

(De même, $AB = AC + CB = 0{,}5x + x = 1{,}5x$ dans le triangle OAB rectangle en A, d'où $R^2 = h^2 + 2{,}25x^2$.)

c. La couronne est le disque de rayon R privé du disque de rayon r :

$$\mathcal{A} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi\left(R^2 - r^2\right) = \pi\left(h^2 + 2{,}25x^2 - h^2 - 0{,}25x^2\right) = \pi \times 2x^2, \qquad \boxed{\mathcal{A} = 2\pi x^2}.$$

d. $\mathcal{A} = 2\pi x^2 \iff x^2 = \dfrac{\mathcal{A}}{2\pi}$. Comme $x > 0$: $\boxed{x = \sqrt{\dfrac{\mathcal{A}}{2\pi}}}$.

e. Avec $\mathcal{A} = 24{,}5\pi$:

$$x = \sqrt{\frac{24{,}5\pi}{2\pi}} = \sqrt{12{,}25} = \boxed{3{,}5}.$$

(Vérification : $3{,}5^2 = 12{,}25$.)

Exercice 3

6 points

1) On décompose chaque nombre en produit de puissances de 2 et de 3 : $9^6 = \left(3^2\right)^6 = 3^{12}$ et $12^2 = \left(2^2 \times 3\right)^2 = 2^4 \times 3^2$.

$$F = \frac{2^4 \times 3^{12} \times 3^5}{2^4 \times 3^2} = \frac{3^{17}}{3^2} = \boxed{3^{15}}.$$

2) On développe $\left(\sqrt{2} - 2\right)^2$ avec $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:

$$G = \left(2 - 4\sqrt{2} + 4\right) + 2\sqrt{2} + 6 = 12 - 2\sqrt{2}, \qquad \boxed{G = 12 - 2\sqrt{2}}.$$

3) **a.** $A = (4x^2 - 12x + 9) - (x^2 - 4x + 4) = 4x^2 - 12x + 9 - x^2 + 4x - 4$, $\boxed{A = 3x^2 - 8x + 5}$.

b. On reconnaît $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ avec $a = 2x - 3$ et $b = x - 2$:

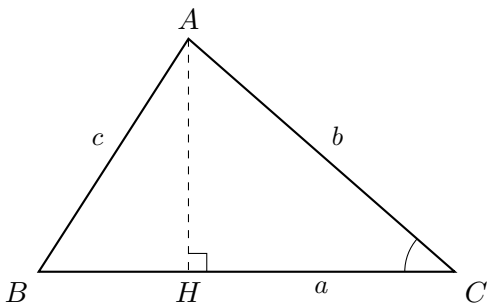
$$\begin{aligned} A &= \left[(2x-3) - (x-2)\right]\left[(2x-3) + (x-2)\right] \\ &= (2x - 3 - x + 2)(2x - 3 + x - 2) \\ &= \boxed{(x-1)(3x-5)}. \end{aligned}$$

(Vérification : $(x-1)(3x-5) = 3x^2 - 5x - 3x + 5 = 3x^2 - 8x + 5$.)

Exercice 4

3 points

1) Figure (les trois angles sont aigus, donc H est sur le segment $[BC]$) :



2) Le triangle AHC est rectangle en H. Dans ce triangle, $[AH]$ est le côté opposé à l'angle $\widehat{ACB}$ et $[AC]$ l'hypoténuse :

$$\sin\left(\widehat{ACB}\right) = \frac{AH}{AC} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{AH = AC \times \sin\left(\widehat{ACB}\right)}.$$

3) $[AH]$ est la hauteur issue de A, relative à la base $[BC]$:

$$\mathcal{A} = \frac{BC \times AH}{2} = \frac{1}{2} \times BC \times AC \times \sin\left(\widehat{ACB}\right) = \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin\left(\widehat{C}\right), \qquad \boxed{\mathcal{A} = \frac{1}{2}\, ab \sin\left(\widehat{C}\right)}.$$