Calculatrice autorisée
Sauf mention contraire, toutes les réponses devront être justifiées de manière rédigée.

Exercice 1 — 6 points

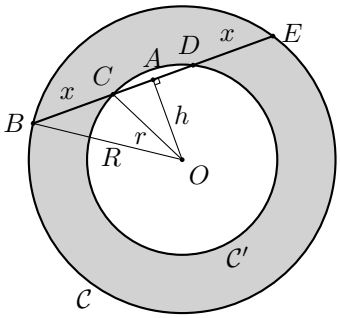
Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant soigneusement votre réponse.

On considère les expressions $A = \dfrac{x-1}{x} - \dfrac{x-1}{x+1}$ et $B = (x+1)^2 - (x+1)(1-x)$.

Affirmation 1 : L'expression A a pour forme fractionnaire $\dfrac{x-1}{x(x+1)}$.
Affirmation 2 : La forme développée de B est $2x^2 + 2x + 2$.
Affirmation 3 : Une factorisation de B est $2x(x+1)$.
Affirmation 4 : Si $x = \sqrt{2}$ alors $B = 2\sqrt{2} + 4$.

Exercice 2 — 5 points

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux cercles de centre O et de rayons respectifs R et r ($R > r$).
$[BE]$ est une corde du cercle $\mathcal{C}$ située à la distance h du centre O : on note A le pied de la perpendiculaire à (BE) passant par O, de sorte que $OA = h$. La corde $[BE]$ coupe $\mathcal{C}'$ en C et D de façon que $BC = CD = DE = x$ avec $x > 0$.



a. Montrer que le point A est le milieu de $[CD]$.
b. Montrer que $r^2 = h^2 + 0{,}25x^2$.

De la même façon, on admet que $R^2 = h^2 + 2{,}25x^2$.

c. En déduire que l'aire $\mathcal{A}$ de la couronne colorée est telle que $\mathcal{A} = 2\pi x^2$.
d. Exprimer x en fonction de $\mathcal{A}$.
e. En déduire la valeur de x si l'aire de la couronne colorée est $24{,}5\pi$. Donner l'écriture décimale.

Exercice 3 — 6 points

Les questions suivantes sont indépendantes.

1) Écrire sous la forme 3^n avec n entier : $F = \dfrac{2^4 \times 9^6 \times 3^5}{12^2}$.
2) Développer et réduire au maximum l'expression suivante : $G = \left(\sqrt{2} - 2\right)^2 + 2\left(\sqrt{2} + 3\right)$.
3) x désigne un nombre réel et $A = (2x-3)^2 - (x-2)^2$. **a.** Développer A. **b.** Factoriser A.

Exercice 4 — 3 points

ABC est un triangle dont les trois angles sont aigus. On nomme H le projeté orthogonal de A sur $[BC]$.

1) Faire une figure.
2) En utilisant la trigonométrie, exprimer AH en fonction de AC et de l'angle $\widehat{ACB}$.
3) Dans un triangle, on note habituellement $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$ les longueurs des côtés, et $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ les angles aux sommets A, B et C.

En utilisant la question précédente, montrer que l'aire du triangle ABC est $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}ab\sin\left(\widehat{C}\right)$.