Exercice 1

1,5 point

Ce sont les trois identités remarquables :

1) $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

2) $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

3) $\boxed{a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)}$

Exercice 2

7,5 points

1) Pour n journées de ski, formule A : $36{,}50 \times n$; formule B : $90 + 18{,}50 \times n$; formule C : $448{,}50$ quel que soit n.
Pour 6 jours : A $= 36{,}5 \times 6 = 219$; B $= 90 + 18{,}5 \times 6 = 90 + 111 = 201$.
Pour 10 jours : A $= 36{,}5 \times 10 = 365$; B $= 90 + 18{,}5 \times 10 = 90 + 185 = 275$.

Nombre de journées de ski	2	6	10
Formule A	73 €	$\boxed{219}$ €	$\boxed{365}$ €
Formule B	127 €	$\boxed{201}$ €	$\boxed{275}$ €
Formule C	448,50 €	$\boxed{448{,}50}$ €	$\boxed{448{,}50}$ €

2) **a.**
- $h(x) = 36{,}5x$: on paie $36{,}50$ € par jour, sans abonnement : $\boxed{h \leftrightarrow \text{formule A}}$.
- $f(x) = 90 + 18{,}5x$: 90 € d'abonnement fixe, plus $18{,}50$ € par jour : $\boxed{f \leftrightarrow \text{formule B}}$.
- $g(x) = 448{,}5$: le prix ne dépend pas du nombre de jours : $\boxed{g \leftrightarrow \text{formule C}}$.

b. Les formules A et B coûtent la même chose lorsque $h(x) = f(x)$:

$$36{,}5x = 90 + 18{,}5x \iff 36{,}5x - 18{,}5x = 90 \iff 18x = 90 \iff x = \frac{90}{18} = 5.$$

Le montant est identique pour $\boxed{5 \text{ journées de ski}}$ (il vaut alors $36{,}5 \times 5 = 182{,}50$ €).

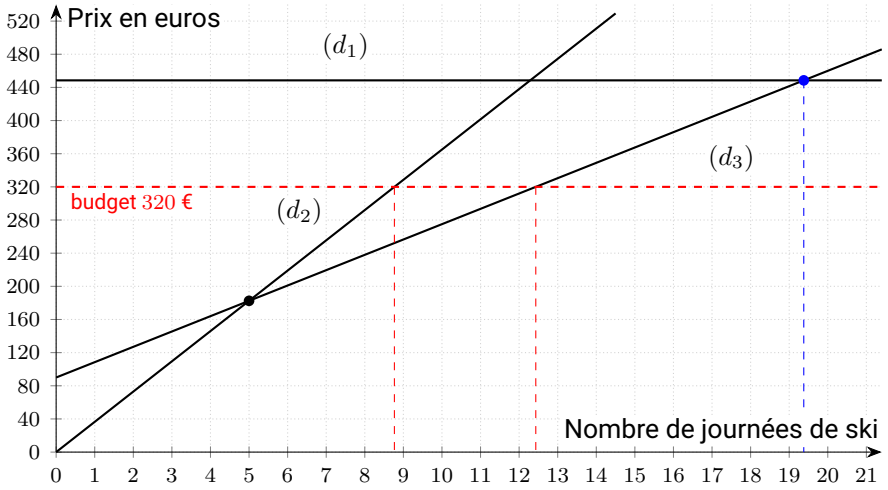
3) **a.** (d_1) est horizontale : c'est la fonction constante g. (d_2) passe par l'origine : c'est la fonction linéaire h. (d_3) coupe l'axe des ordonnées en 90 : c'est f.

$$\boxed{(d_1) \leftrightarrow g \qquad (d_2) \leftrightarrow h \qquad (d_3) \leftrightarrow f}$$

b. On trace la droite horizontale d'ordonnée 320 (en pointillés sur la figure ci-dessous).
- Elle coupe (d_2) (formule A) en un point d'abscisse comprise entre 8 et 9 : au plus 8 jours.
- Elle coupe (d_3) (formule B) en un point d'abscisse comprise entre 12 et 13 : au plus 12 jours.
- La formule C coûte $448{,}50$ € : elle dépasse le budget.

En choisissant la formule B, Marin peut skier au maximum $\boxed{12 \text{ journées}}$.
Contrôle par le calcul : $f(12) = 90 + 18{,}5 \times 12 = 312 \leqslant 320$ et $f(13) = 330{,}5 > 320$.

c. La formule C devient avantageuse lorsque (d_1) passe au-dessous des deux autres droites. Au-delà de 5 jours, la moins chère des formules A et B est la formule B ; (d_3) coupe (d_1) en un point d'abscisse comprise entre 19 et 20.
Contrôle : $f(19) = 441{,}5 < 448{,}5$ et $f(20) = 460 > 448{,}5$.
La formule C devient avantageuse à partir de $\boxed{20 \text{ journées de ski}}$.



Exercice 3

5 points

1) f est affine, donc son coefficient directeur est égal au taux d'accroissement entre deux valeurs quelconques :

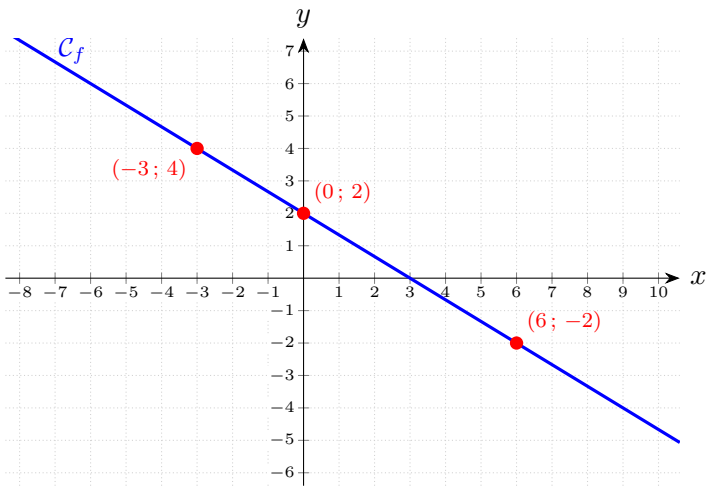
$$m = \frac{f(6) - f(-3)}{6 - (-3)} = \frac{-2 - 4}{9} = \frac{-6}{9}, \qquad \boxed{m = -\frac{2}{3}}.$$

2) **a.** $f(x) = mx + p$ avec $p = f(0) = 2$, donc $\boxed{f(x) = -\frac{2}{3}x + 2}$.
Vérification : $f(-3) = 2 + 2 = 4$ et $f(6) = -4 + 2 = -2$.

b. $f(-7) = \frac{14}{3} + 2 = \frac{20}{3}$; $f(5) = -\frac{10}{3} + 2 = -\frac{4}{3}$; $f(10) = -\frac{20}{3} + 2 = -\frac{14}{3}$.

x	-7	-3	0	5	10
$f(x)$	$\boxed{\frac{20}{3}}$	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	$\boxed{-\frac{4}{3}}$	$\boxed{-\frac{14}{3}}$

3) $\mathcal{C}_f$ est une droite. On choisit des points à coordonnées entières : $(-3\,;\,4)$, $(0\,;\,2)$ et $(6\,;\,-2)$.



Exercice 4

6 points

1)

- Avec $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ deux fois :

$$A = (4x^2 + 24x + 36) + (25x^2 + 30x + 9) \qquad \boxed{A = 29x^2 + 54x + 45}.$$

- Avec $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $a = \dfrac{1}{3}$ et $b = 8x$:

$$B = \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{3} \times 8x + (8x)^2 \qquad \boxed{B = \frac{1}{9} - \frac{16}{3}x + 64x^2}.$$

- Avec $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$:

$$C = 1 - \left((3y)^2 - 1^2\right) = 1 - (9y^2 - 1) = 1 - 9y^2 + 1 \qquad \boxed{C = 2 - 9y^2}.$$

2)

- $E = \left(\dfrac{1}{6}\right)^2 + 2 \times \dfrac{1}{6} \times 3y + (3y)^2$: c'est la forme $a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = \dfrac{1}{6}$ et $b = 3y$, donc

$$\boxed{E = \left(3y + \frac{1}{6}\right)^2}.$$

- On ordonne : $F = 4x^2 - 28x + 49 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 7 + 7^2$, forme $a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 2x$ et $b = 7$:

$$\boxed{F = (2x - 7)^2}.$$

- $G = 4^2 - (11x - 25)^2$ est de la forme $a^2 - b^2$ avec $a = 4$ et $b = 11x - 25$:

$$G = \big(4 - (11x - 25)\big)\big(4 + (11x - 25)\big) = (4 - 11x + 25)(4 + 11x - 25)$$

$$\boxed{G = (29 - 11x)(11x - 21)}.$$