Exercice 1

6 points

1) On a $\lim\limits_{x\to 5}(-4x) = -20$ et, pour $x > 5$, $5 - x < 0$: $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\x>5}}(5-x) = 0^-$.

Par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\x>5}} f(x) = +\infty$ (« $\dfrac{-20}{0^-}$ »).

Affirmation 1 : **fausse**.

2) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}\left(3 - \dfrac{5}{x^2}\right) = -\infty$.

Or $\lim\limits_{X\to -\infty} \mathrm{e}^X = 0$, donc par composition $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0 \neq \mathrm{e}^3$.

Affirmation 2 : **fausse**.

3) Contre-exemple : $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ définit une suite de termes strictement positifs, convergente vers 0.

Mais $u_n + \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{n+1} + n + 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n+1} + n + 1\right) = +\infty$: la suite $\left(u_n + \dfrac{1}{u_n}\right)$ diverge.

Affirmation 3 : **fausse**.

4) Contre-exemple : $v_n = n$ et $w_n = -n$. Alors $v_n + w_n = 0$: la suite $(v_n + w_n)$ est constante, donc convergente.

Mais $v_n - w_n = 2n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty$: la suite $(v_n - w_n)$ diverge.

Affirmation 4 : **fausse**.

5) Contre-exemple : $f(x) = x^2 + 1$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Pour $x \neq 0$: $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2+1} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}}$. Par croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{f(x)} = +\infty \neq 1$.

Affirmation 5 : **fausse**.

6) Pour tout $x > 0$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$; en multipliant l'encadrement par e^{-x} :

$$0 \leqslant f(x)\mathrm{e}^{-x} \leqslant x^2\mathrm{e}^{-x} = \frac{x^2}{\mathrm{e}^x}.$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} = 0$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-x} = 0$.

Affirmation 6 : **vraie**.

Exercice 2

10 points

1) Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x = 0^+$, donc par quotient $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = +\infty$.
La droite d'équation $x = 0$, c'est-à-dire **l'axe des ordonnées, est asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f$.

3) $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = \mathrm{e}^x$, $u'(x) = \mathrm{e}^x$, $v(x) = x$, $v'(x) = 1$. Pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{\mathrm{e}^x \times x - \mathrm{e}^x \times 1}{x^2} = \boxed{\frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}}.$$

4) Pour tout $x > 0$, $\mathrm{e}^x > 0$ et $x^2 > 0$: $f'(x)$ est du signe de $x - 1$.
$f(1) = \dfrac{\mathrm{e}^1}{1} = \mathrm{e}$; les limites ont été obtenues aux questions 1) et 2).

x	0		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
variations de f	‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

f admet un **minimum égal à** $\boxed{\mathrm{e}}$**, atteint en** $x = 1$.

5) On dérive $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$ comme un quotient : le numérateur $\mathrm{e}^x(x-1)$ a pour dérivée $\mathrm{e}^x(x-1) + \mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x$, et $(x^2)' = 2x$. Pour tout $x > 0$:

$$f''(x) = \frac{x\mathrm{e}^x \times x^2 - \mathrm{e}^x(x-1) \times 2x}{x^4} = \frac{x\mathrm{e}^x\left(x^2 - 2x + 2\right)}{x^4} = \boxed{\frac{\mathrm{e}^x\left(x^2-2x+2\right)}{x^3}}.$$

6) On remarque que $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0$. Pour tout $x > 0$, $\mathrm{e}^x > 0$ et $x^3 > 0$, donc $f''(x) > 0$.
La fonction f est donc $\boxed{\text{convexe sur }]0\,;+\infty[}$.

7) Soit $n \geqslant 2$. Pour tout $x > 0$, $g_n(x) = \mathrm{e}^x \times x^{-n}$; par dérivée d'un produit :

$$g_n'(x) = \mathrm{e}^x x^{-n} - n\mathrm{e}^x x^{-n-1} = \mathrm{e}^x x^{-n-1}(x-n) = \frac{\mathrm{e}^x(x-n)}{x^{n+1}}.$$

On dérive à nouveau $g_n'(x) = \mathrm{e}^x(x-n)\,x^{-n-1}$: la dérivée de $\mathrm{e}^x(x-n)$ est $\mathrm{e}^x(x-n+1)$, donc

$$g_n''(x) = \mathrm{e}^x(x-n+1)x^{-n-1} - (n+1)\mathrm{e}^x(x-n)x^{-n-2} = \frac{\mathrm{e}^x}{x^{n+2}}\Big(x(x-n+1) - (n+1)(x-n)\Big).$$

Or $x(x-n+1) - (n+1)(x-n) = x^2 - nx + x - nx - x + n^2 + n = x^2 - 2nx + n^2 + n = (x-n)^2 + n$.
Ainsi, pour tout $x > 0$: $g_n''(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x\left((x-n)^2 + n\right)}{x^{n+2}}$.
Comme $(x-n)^2 + n \geqslant n > 0$, $\mathrm{e}^x > 0$ et $x^{n+2} > 0$, on a $g_n''(x) > 0$ sur $]0\,;+\infty[$: g_n'' ne s'annule pas et ne change jamais de signe, g_n est convexe sur $]0\,;+\infty[$.
Conclusion : $\boxed{\text{pour aucune valeur de } n \geqslant 2,\ \mathcal{C}_n \text{ n'admet de point d'inflexion.}}$

Exercice 3

13 points

1) Perdre $10\,\%$ revient à multiplier par $1 - \dfrac{10}{100} = 0{,}9$, puis on ajoute 250 :

$$u_1 = 0{,}9 \times 1\,000 + 250 = \boxed{1\,150}.$$

2) Pour tout entier naturel n, l'année $(2020 + n + 1)$, on garde $90\,\%$ des u_n abonnés de l'année précédente, soit $0{,}9\,u_n$, et on ajoute 250 nouveaux abonnés. Donc $\boxed{u_{n+1} = 0{,}9\,u_n + 250}$.

3) La boucle applique 10 fois la relation de récurrence à partir de $u_0 = 1\,000$: `suite(10)` renvoie u_{10}, c'est-à-dire **le nombre d'abonnés en 2030** selon le modèle ($u_{10} \approx 1\,977$).

4) **a.** Pour tout entier naturel n, notons $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \leqslant 2\,500$ ».
Initialisation : $u_0 = 1\,000 \leqslant 2\,500$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors

$$\begin{aligned} u_n \leqslant 2\,500 &\iff 0{,}9\,u_n \leqslant 2\,250 && \text{(on multiplie par } 0{,}9 > 0) \\ &\iff 0{,}9\,u_n + 250 \leqslant 2\,500 && \text{(on ajoute } 250) \\ &\iff u_{n+1} \leqslant 2\,500. \end{aligned}$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est vraie : la propriété est héréditaire.
Conclusion : par récurrence, $\boxed{u_n \leqslant 2\,500 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = 0{,}9\,u_n + 250 - u_n = 250 - 0{,}1\,u_n$.
Or $u_n \leqslant 2\,500$ donne $0{,}1\,u_n \leqslant 250$, donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$: la suite (u_n) est $\boxed{\text{croissante}}$.

c. La suite (u_n) est croissante et majorée par $2\,500$: d'après le théorème de convergence monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ vers un réel $\ell \leqslant 2\,500$.

5) **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$t_{n+1} = u_{n+1} - 2\,500 = 0{,}9\,u_n + 250 - 2\,500 = 0{,}9\,u_n - 2\,250 = 0{,}9\,(u_n - 2\,500) = 0{,}9\,t_n.$$

(t_n) est géométrique de $\boxed{\text{raison } 0{,}9}$ et de premier terme $t_0 = u_0 - 2\,500 = \boxed{-1\,500}$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $t_n = t_0 \times 0{,}9^n = -1\,500 \times 0{,}9^n$, et $u_n = t_n + 2\,500$, d'où

$$\boxed{u_n = -1\,500 \times 0{,}9^n + 2\,500}.$$

c. Comme $-1 < 0{,}9 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0$, donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2\,500}$.
Selon ce modèle, le nombre d'abonnés augmente et **se stabilise à long terme autour de** $2\,500$, sans jamais dépasser ce nombre.

6) **a.** On compte les années tant que le nombre d'abonnés ne dépasse pas $2\,200$, et on renvoie l'année :

```
def prog() :
    u = 1000
    n = 0
    while u <= 2200 :
        u = 0.9*u + 250
        n = n + 1
    return 2020 + n
```

b. À la calculatrice : $u_{15} \approx 2\,191{,}2 \leqslant 2\,200$ et $u_{16} \approx 2\,222{,}0 > 2\,200$.
Le nombre d'abonnés dépasse $2\,200$ pour la première fois pour $n = 16$, c'est-à-dire en $\boxed{2036}$.

7) Par linéarité de la somme, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(-1\,500 \times 0{,}9^k + 2\,500\right) = -1\,500 \sum_{k=0}^{n} 0{,}9^k + \sum_{k=0}^{n} 2\,500.$$

La première somme est celle des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $0{,}9 \neq 1$; la seconde compte $n+1$ termes égaux à $2\,500$:

$$S_n = -1\,500 \times \frac{1 - 0{,}9^{n+1}}{1 - 0{,}9} + 2\,500(n+1) = \boxed{-15\,000\left(1 - 0{,}9^{n+1}\right) + 2\,500(n+1)}.$$

Vérification : $S_0 = -15\,000 \times 0{,}1 + 2\,500 = 1\,000 = u_0$ et $S_1 = -15\,000 \times 0{,}19 + 5\,000 = 2\,150 = u_0 + u_1$.

Exercice 4

11 points

1) $a_1 = 2a_0 + b_0 = 2 + 1 = \boxed{3}$ et $b_1 = 3a_0 + 2b_0 = 3 + 2 = \boxed{5}$;
$a_2 = 2a_1 + b_1 = 6 + 5 = \boxed{11}$ et $b_2 = 3a_1 + 2b_1 = 9 + 10 = \boxed{19}$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $b_{n+1} - b_n = 3a_n + 2b_n - b_n = 3a_n + b_n$.
Les termes a_n et b_n étant strictement positifs, $3a_n + b_n > 0$.
La suite (b_n) est $\boxed{\text{strictement croissante}}$.
Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \geqslant b_0$, c'est-à-dire $\boxed{b_n \geqslant 1}$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$: « $a_n \geqslant 2n + 1$ ».
Initialisation : $a_0 = 1$ et $2 \times 0 + 1 = 1$: $a_0 \geqslant 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $a_n \geqslant 2n + 1$. On sait aussi que $b_n \geqslant 1$ (question 2). Alors

$$\begin{aligned} a_{n+1} = 2a_n + b_n &\geqslant 2(2n+1) + 1 && \text{(car } a_n \geqslant 2n+1 \text{ et } b_n \geqslant 1\text{)} \\ &= 4n + 3 \geqslant 2n + 3 = 2(n+1) + 1 && \text{(car } 4n \geqslant 2n\text{).} \end{aligned}$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est vraie : la propriété est héréditaire.
Conclusion : par récurrence, $\boxed{a_n \geqslant 2n + 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

4) $\lim\limits_{n \to +\infty} (2n + 1) = +\infty$ et $a_n \geqslant 2n + 1$ pour tout n : par comparaison, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty}$.

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n^2 > 0$ donc $\dfrac{2}{a_n^2} \geqslant 0$.

De plus $a_n \geqslant 2n+1 > 0$; la fonction carré étant croissante sur $[0\,;+\infty[$, $a_n^2 \geqslant (2n+1)^2 > 0$, et la fonction inverse étant décroissante sur $]0\,;+\infty[$:

$$\frac{1}{a_n^2} \leqslant \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \text{donc} \quad \boxed{0 \leqslant \frac{2}{a_n^2} \leqslant \frac{2}{(2n+1)^2}}.$$

6) $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n+1)^2 = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{(2n+1)^2} = 0$. D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{a_n^2} = 0$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} q_n^2 = \lim_{n\to+\infty} \left(3 - \frac{2}{a_n^2}\right) = \boxed{3}.$$

Les termes a_n et b_n sont strictement positifs, donc $q_n > 0$ et $q_n = \sqrt{q_n^2}$.

La fonction racine carrée étant continue en 3, par composition $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = \sqrt{3}}$.

7) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en divisant numérateur et dénominateur par $a_n \neq 0$:

$$q_{n+1} = \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{3a_n + 2b_n}{2a_n + b_n} = \frac{3 + 2\frac{b_n}{a_n}}{2 + \frac{b_n}{a_n}} = \boxed{\frac{3 + 2q_n}{2 + q_n}}.$$

8) La variable `q` part de $q_0 = 1$ et prend successivement les valeurs $q_1, q_2, \ldots$ grâce à la relation de la question 7) ; `n` compte les étapes. La boucle s'arrête dès que $|q_n - \sqrt{3}| \leqslant 10^{-4}$.

La valeur 4 renvoyée signifie donc que $n = 4$ **est le plus petit entier tel que** $|q_n - \sqrt{3}| \leqslant 10^{-4}$: $q_4 = \dfrac{265}{153}$ est la première valeur de la suite qui approche $\sqrt{3}$ à 10^{-4} près.

Contrôle : $|q_3 - \sqrt{3}| = \left|\dfrac{71}{41} - \sqrt{3}\right| \approx 3{,}4 \times 10^{-4}$ et $|q_4 - \sqrt{3}| \approx 2{,}5 \times 10^{-5}$.