Calculatrice autorisée en mode examen

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Le sujet est noté sur 40 points.

Exercice 1

6 points

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier soigneusement.

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ par $f(x) = \dfrac{-4x}{5-x}$.
Affirmation 1 : $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x>5}} f(x) = -\infty$.

2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \mathrm{e}^{3-\frac{5}{x^2}}$.
Affirmation 2 : $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \mathrm{e}^3$.

3) On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$, convergente et de termes strictement positifs.
Affirmation 3 : la suite $\left(u_n + \dfrac{1}{u_n}\right)$ est convergente.

4) On considère deux suites (v_n) et (w_n) définies sur $\mathbb{N}$.
Affirmation 4 : si la suite $(v_n + w_n)$ est convergente, alors la suite $(v_n - w_n)$ est convergente.

5) Soit f une fonction strictement positive définie sur $\mathbb{R}$.
Affirmation 5 : si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{f(x)} = 1$.

6) Soit f une fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ telle que $0 \leqslant f(x) \leqslant x^2$ pour tout $x > 0$.
Affirmation 6 : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\mathrm{e}^{-x} = 0$.

Exercice 2

10 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1) Préciser la limite de la fonction f en $+\infty$.

2) Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$.

3) Montrer que pour tout nombre réel $x > 0$: $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$, où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

4) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$. On veillera à y faire apparaître les limites et les extrema.

5) Calculer $f''(x)$ pour tout réel $x > 0$, où f'' désigne la dérivée seconde de f.

6) Étudier alors la convexité de la fonction f.

7) Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on définit sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ la fonction g_n par : $g_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n}$.
On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction g_n dans un repère orthonormé.
Déterminer pour quelles valeurs de n la courbe $\mathcal{C}_n$ admet au moins un point d'inflexion.

Exercice 3

13 points

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte $1\,000$ abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd $10\,\%$ de ses abonnés, mais elle gagne également 250 nouveaux abonnés.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'abonnés à son profil en l'année $(2020 + n)$, suivant cette modélisation. Ainsi, $u_0 = 1\,000$.

1) Calculer u_1.

2) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0{,}9\,u_n + 250$.

3) La fonction Python nommée `suite` est définie ci-contre.
Dans le contexte de l'exercice, interpréter la valeur renvoyée par `suite(10)`.

```
def suite(n) :
    u = 1000
    for i in range(n) :
        u = 0.9*u + 250
    return u
```

4)
- **a.** Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant 2\,500$.
- **b.** Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
- **c.** Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

5) Soit (t_n) la suite définie par $t_n = u_n - 2\,500$ pour tout entier naturel n.
- **a.** Montrer que la suite (t_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme t_0.
- **b.** En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = -1\,500 \times 0{,}9^n + 2\,500$.
- **c.** Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

6) On souhaite écrire un programme qui permette de déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera $2\,200$ pour la première fois.
- **a.** Recopier et compléter le programme fourni ci-contre pour qu'il renvoie la valeur attendue.
- **b.** Déterminer cette année à l'aide de la calculatrice.

```
def prog() :
    u = 1000
    n = ..........
    while ..............
        ..............
        ..............
    return ..........
```

7) Exprimer en fonction de n la somme S_n définie par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Exercice 4

11 points

Les suites (a_n) et (b_n) sont définies par leurs premiers termes $a_0 = 1$ et $b_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, par les relations :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = 3a_n + 2b_n \end{cases}$$

Tout au long de l'exercice, on pourra utiliser sans démonstration le fait que tous les termes des suites (a_n) et (b_n) sont **strictement positifs**.

1) Donner les valeurs de a_1, b_1, a_2 et b_2.

2) Prouver que la suite (b_n) est strictement croissante. Que peut-on en conclure pour la comparaison de b_n avec 1 ?

3) À l'aide d'une récurrence, établir que $a_n \geqslant 2n + 1$ quel que soit l'entier naturel n.

4) Quelle est alors la limite de (a_n) ?

Pour tout entier naturel n, on note $q_n = \dfrac{b_n}{a_n}$, et l'on admet l'égalité : $q_n^2 = 3 - \dfrac{2}{a_n^2}$.

5) Établir l'encadrement suivant, valable pour tout entier naturel n : $0 \leqslant \dfrac{2}{a_n^2} \leqslant \dfrac{2}{(2n+1)^2}$.

6) Quelle est la limite de la suite $\left(q_n^2\right)$? Prouver ensuite que la suite (q_n) a pour limite $\sqrt{3}$.

7) Vérifier que, quel que soit l'entier naturel n, $q_{n+1} = \dfrac{3 + 2q_n}{2 + q_n}$.

8) Voici une fonction écrite en Python (`abs` renvoie la valeur absolue, `sqrt` la racine carrée, et `10**(-4)` désigne 10^{-4}) :

```
from math import sqrt
def approx() :
    n = 0
    q = 1
    while abs(q - sqrt(3)) > 10**(-4) :
        q = (3 + 2*q)/(2 + q)
        n = n + 1
    return n
```

L'appel `approx()` renvoie 4. Que représente ce nombre ?