Exercice 1 : Une multiplication à rectifier

3 points

1) En ajoutant x à chacun des trois nombres, l'égalité devient $(12+x)(12+x) = 2\,021 + x$, soit $(12+x)^2 = 2\,021 + x$. En développant :

$$144 + 24x + x^2 = 2\,021 + x \iff \boxed{x^2 + 23x - 1\,877 = 0}.$$

2) $\Delta = 23^2 - 4 \times 1 \times (-1\,877) = 529 + 7\,508 = 8\,037 > 0$. Deux solutions :

$$x_1 = \frac{-23 + \sqrt{8\,037}}{2}, \qquad x_2 = \frac{-23 - \sqrt{8\,037}}{2}.$$

Comme $8\,037 = 9 \times 893$, on a $\sqrt{8\,037} = 3\sqrt{893}$, d'où les valeurs exactes

$$\boxed{x_1 = \frac{-23 + 3\sqrt{893}}{2} \approx 33{,}32} \quad \text{et} \quad \boxed{x_2 = \frac{-23 - 3\sqrt{893}}{2} \approx -56{,}32}.$$

Attention. $8\,037$ n'est pas un carré parfait : contrairement aux autres exercices de cette feuille, la réponse n'est pas un nombre entier. Il faut donc donner la valeur exacte, et seulement ensuite une valeur approchée.

3) Avec $x_1 \approx 33{,}32$: à gauche $(12 + 33{,}32)^2 = 45{,}32^2 \approx 2\,054{,}3$; à droite $2\,021 + 33{,}32 = 2\,054{,}32$. Les deux membres coïncident à l'arrondi près.

Exercice 2 : Deux cyclistes vers Saint-Jean-de-Luz

3 points

1) À vitesse constante, durée = distance ÷ vitesse. Le plus lent met $\dfrac{195}{v}$ heures, le plus rapide $\dfrac{195}{v+4}$ heures, avec $v > 0$.

2) Le plus rapide arrive une heure plus tôt, donc sa durée est inférieure d'une heure :

$$\frac{195}{v} - \frac{195}{v+4} = 1.$$

On multiplie les deux membres par $v(v+4)$, non nul puisque $v > 0$:

$$195(v+4) - 195v = v(v+4) \iff 780 = v^2 + 4v \iff \boxed{v^2 + 4v - 780 = 0}.$$

3) $\Delta = 16 + 3\,120 = 3\,136 = 56^2$, donc $v = \dfrac{-4 \pm 56}{2}$, soit $v = 26$ ou $v = -30$.

Une vitesse étant positive, on retient $\boxed{v = 26 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}}$ pour le plus lent et $\boxed{30 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}}$ pour le plus rapide.

Vérification : $\dfrac{195}{26} = 7{,}5$ h et $\dfrac{195}{30} = 6{,}5$ h. L'écart est bien d'une heure.

Exercice 3 : Des points à distance imposée

3 points

1) M appartient à $\mathcal{D}$, donc $y = 2x + 4$. Le repère étant orthonormé,

$$OM^2 = x^2 + y^2 = x^2 + (2x+4)^2 = x^2 + 4x^2 + 16x + 16 = \boxed{5x^2 + 16x + 16}.$$

2) $OM = \sqrt{5} \iff OM^2 = 5$ (les deux quantités étant positives), soit

$$5x^2 + 16x + 16 = 5 \iff 5x^2 + 16x + 11 = 0.$$

$\Delta = 16^2 - 4\times 5\times 11 = 256 - 220 = 36 = 6^2$, d'où $x = \dfrac{-16 \pm 6}{10}$, c'est-à-dire $x = -1$ ou $x = -\dfrac{11}{5}$.
Les ordonnées correspondantes sont $y = 2(-1)+4 = 2$ et $y = 2\left(-\dfrac{11}{5}\right)+4 = -\dfrac{22}{5}+\dfrac{20}{5} = -\dfrac{2}{5}$.

$$\boxed{M_1(-1\,;\,2)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{M_2\left(-\tfrac{11}{5}\,;\,-\tfrac{2}{5}\right)}.$$

3) $OM_1^2 = (-1)^2 + 2^2 = 5$; et $OM_2^2 = \dfrac{121}{25} + \dfrac{4}{25} = \dfrac{125}{25} = 5$. Les deux points conviennent.

Exercice 4 : Un rectangle qu'on agrandit

3 points

1) Augmenter de $t\,\%$ revient à multiplier par $1 + \dfrac{t}{100}$, et augmenter de $2t\,\%$ à multiplier par $1 + \dfrac{2t}{100}$.
L'aire devient donc

$$\ell\left(1+\frac{t}{100}\right)\times L\left(1+\frac{2t}{100}\right) = \ell L\left(1+\frac{t}{100}\right)\left(1+\frac{2t}{100}\right).$$

2) L'aire de départ étant ℓL, une augmentation de $32\,\%$ s'écrit $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)\left(1+\dfrac{2t}{100}\right) = 1{,}32$. En développant :

$$1 + \frac{2t}{100} + \frac{t}{100} + \frac{2t^2}{10\,000} = 1{,}32 \iff \frac{3t}{100} + \frac{t^2}{5\,000} = 0{,}32.$$

En multipliant par $5\,000$: $150t + t^2 = 1\,600$, soit $\boxed{t^2 + 150t - 1\,600 = 0}$.

3) $\Delta = 150^2 + 4\times 1\,600 = 22\,500 + 6\,400 = 28\,900 = 170^2$, donc $t = \dfrac{-150 \pm 170}{2}$, soit $t = 10$ ou $t = -160$.
La valeur -160 est à écarter : une augmentation de $-160\,\%$ donnerait une largeur négative. On conclut $\boxed{t = 10}$.
Vérification : la largeur est multipliée par $1{,}10$, la longueur par $1{,}20$, et $1{,}10 \times 1{,}20 = 1{,}32$: l'aire augmente bien de $32\,\%$.

Exercice 5 : Trois entiers consécutifs

2 points

En notant n l'entier du milieu, les trois entiers sont $n-1$, n et $n+1$. Alors

$$(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = n^2 - 2n + 1 + n^2 + n^2 + 2n + 1 = 3n^2 + 2.$$

L'équation $3n^2 + 2 = 1\,877$ donne $3n^2 = 1\,875$, puis $n^2 = 625$, d'où $n = 25$ ou $n = -25$.
Les deux triplets d'entiers conviennent :

$$\boxed{24,\ 25,\ 26} \qquad \text{et} \qquad \boxed{-26,\ -25,\ -24}.$$

Vérification : $24^2 + 25^2 + 26^2 = 576 + 625 + 676 = 1\,877$. L'énoncé ne disant pas que les entiers sont positifs, les deux réponses sont à donner.

Exercice 6 : Les pages collées

4 points

1) C'est la somme des n premiers entiers, c'est-à-dire la somme des n premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 1 : $1 + 2 + \cdots + n = \boxed{\dfrac{n(n+1)}{2}}$.

2) Les deux pages collées se font face : la première porte un numéro pair p, la seconde $p+1$. Le total annoncé est la somme de tous les numéros diminuée de ces deux-là :

$$\frac{n(n+1)}{2} - \big(p + (p+1)\big) = 2\,003 \iff \boxed{\frac{n(n+1)}{2} = 2\,004 + 2p}.$$

3) Comme $p \geqslant 2$ et $p+1 \leqslant n$, on a $2\,008 \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2} \leqslant 2\,004 + 2n$.

De $\dfrac{n(n+1)}{2} \geqslant 2\,008$ on tire $n(n+1) \geqslant 4\,016$: comme $62 \times 63 = 3\,906$ et $63 \times 64 = 4\,032$, il faut $n \geqslant 63$.

De $\dfrac{n(n+1)}{2} \leqslant 2\,004 + 2n$ on tire $n^2 - 3n - 4\,008 \leqslant 0$; le discriminant vaut $9 + 16\,032 = 16\,041$ et $\sqrt{16\,041} \approx 126{,}65$, donc la racine positive est $\approx 64{,}8$: il faut $n \leqslant 64$.

Il reste donc deux cas à examiner.

- $n = 63$: $\dfrac{63 \times 64}{2} = 2\,016$, donc $2p = 2\,016 - 2\,004 = 12$ et $p = 6$, qui est bien pair.
- $n = 64$: $\dfrac{64 \times 65}{2} = 2\,080$, donc $2p = 76$ et $p = 38$, pair également.

Les deux réponses conviennent :

$$\boxed{n = 63 \text{ et les pages } 6 \text{ et } 7} \quad \text{ou} \quad \boxed{n = 64 \text{ et les pages } 38 \text{ et } 39}.$$

Vérifications : $2\,016 - (6+7) = 2\,003$ et $2\,080 - (38+39) = 2\,003$.

À retenir : le total $2\,003$ ne suffit pas à déterminer le livre. Conclure après avoir trouvé le premier cas aurait fait manquer la moitié de la réponse.

Exercice 7 : La pelouse du paysagiste

2 points

Soit w la largeur en mètres, avec $w > 0$. La longueur vaut $w+5$ et l'aire $w(w+5)$. La condition s'écrit

$$w(w+5) \leqslant 36 \iff w^2 + 5w - 36 \leqslant 0.$$

Le discriminant vaut $\Delta = 25 + 144 = 169 = 13^2$, et les racines sont $w = \dfrac{-5 \pm 13}{2}$, soit $w = 4$ et $w = -9$.

Le coefficient de w^2 étant positif, le trinôme est négatif ou nul *entre* les racines : $w^2 + 5w - 36 \leqslant 0 \iff -9 \leqslant w \leqslant 4$.

En tenant compte de $w > 0$, la largeur doit vérifier

$$\boxed{w \in]0\,;\,4]} \quad \text{(en mètres)}.$$

Les deux bornes : 0 est exclu car une largeur nulle ne définit pas de pelouse ; 4 est inclus car pour $w = 4$ l'aire vaut $4 \times 9 = 36$ m^2, ce que l'énoncé autorise.