Calculatrice autorisée

Chaque exercice se résout en posant une inconnue, en traduisant l'énoncé par une équation ou une inéquation du second degré, puis en revenant à la question posée.

Exercice 1 : Une multiplication à rectifier

3 points

On considère l'égalité, manifestement fausse :

$$12 \times 12 = 2\,021.$$

On cherche un même nombre, positif ou négatif, à ajouter à *chacun* des trois nombres de cette opération pour qu'elle devienne exacte.

1) En notant x ce nombre, montrer que le problème revient à résoudre l'équation $x^2 + 23x - 1\,877 = 0$.
2) Résoudre cette équation. *On donnera les valeurs exactes, puis des valeurs approchées au centième.*
3) Vérifier le résultat positif à la calculatrice, en recalculant les deux membres.

Exercice 2 : Deux cyclistes vers Saint-Jean-de-Luz

3 points

Pour se rendre de Bordeaux à Saint-Jean-de-Luz, distantes d'environ 195 km, deux cyclistes partent en même temps. La vitesse moyenne de l'un est supérieure de 4 km·h^{-1} à celle de l'autre, et il arrive une heure plus tôt.

1) On note v la vitesse moyenne du plus lent, en km·h^{-1}. Exprimer en fonction de v la durée du trajet de chacun des deux cyclistes.
2) En déduire que v vérifie l'équation $v^2 + 4v - 780 = 0$.
3) Déterminer la vitesse moyenne de chaque cycliste.

Exercice 3 : Des points à distance imposée

3 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé d'origine O. On note $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = 2x + 4$, et $M(x\,;\,y)$ un point de cette droite.

1) Exprimer OM^2 en fonction de la seule inconnue x.
2) Déterminer les coordonnées de tous les points M de $\mathcal{D}$ tels que $OM = \sqrt{5}$.
3) Vérifier chacune des réponses obtenues.

Exercice 4 : Un rectangle qu'on agrandit

3 points

On augmente la largeur d'un rectangle de $t\,\%$ et sa longueur de $2t\,\%$. Son aire augmente alors de $32\,\%$.

1) En notant ℓ et L les dimensions de départ, exprimer l'aire du nouveau rectangle en fonction de ℓ, L et t.
2) En déduire que t vérifie l'équation $t^2 + 150t - 1\,600 = 0$.

3) Déterminer la valeur de t. *Une seule des deux solutions a un sens ici : on expliquera pourquoi.*

Exercice 5 : Trois entiers consécutifs

2 points

Déterminer trois nombres entiers consécutifs sachant que la somme de leurs carrés est égale à $1\,877$. *On pourra appeler n celui du milieu.*

Exercice 6 : Les pages collées

4 points

Les pages d'un livre sont numérotées de 1 à n. On rappelle que la page numérotée 1 est toujours une page de droite : deux pages qui se font face portent donc un numéro pair, puis le numéro impair suivant.

On additionne les numéros de toutes les pages et on trouve un total de $2\,003$. Mais deux pages se faisant face sont restées collées, et leurs numéros n'ont pas été comptés.

1) Rappeler, en fonction de n, la somme $1 + 2 + \cdots + n$ de tous les numéros de pages. *C'est la somme des termes d'une suite arithmétique.*

2) On note p le numéro de la première des deux pages collées. Montrer que $\dfrac{n(n+1)}{2} = 2\,004 + 2p$.

3) En déduire un encadrement de n, puis **déterminer toutes les valeurs possibles** du nombre de pages du livre et des numéros des deux pages collées. *Attention : il y a plus d'une réponse.*

Exercice 7 : La pelouse du paysagiste

2 points

Un paysagiste aménage une pelouse rectangulaire dont la longueur doit mesurer 5 mètres de plus que la largeur.

Déterminer la condition sur la largeur pour que l'aire de la pelouse soit inférieure ou égale à 36 m^2. *On donnera la réponse sous forme d'un intervalle, en justifiant les bornes.*