Exercice 1

12 points

Partie A

1) On pose $u(x) = 0{,}96x$ et $v(x) = 0{,}93x + 0{,}03$. Pour tout $x \in [0\,;1]$, $v(x) \geqslant 0{,}03 > 0$, donc $f = \dfrac{u}{v}$ est dérivable sur $[0\,;1]$, avec $u'(x) = 0{,}96$ et $v'(x) = 0{,}93$.

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{0{,}96\,(0{,}93x + 0{,}03) - 0{,}96x \times 0{,}93}{(0{,}93x + 0{,}03)^2} = \frac{0{,}96 \times 0{,}03}{(0{,}93x + 0{,}03)^2}.$$

Comme $0{,}96 \times 0{,}03 = 0{,}028\,8$:

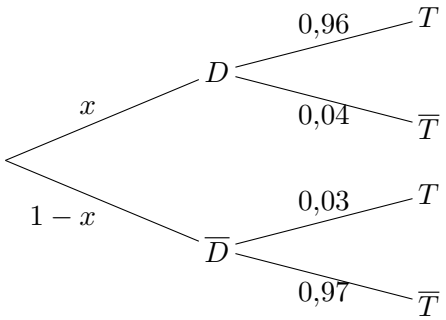
$$\boxed{f'(x) = \frac{0{,}028\,8}{(0{,}93x + 0{,}03)^2}} \quad \text{pour tout } x \in [0\,;1].$$

2) Pour tout $x \in [0\,;1]$, le numérateur $0{,}028\,8$ est strictement positif et le dénominateur, un carré non nul, aussi : $f'(x) > 0$.
La fonction f est donc $\boxed{\text{strictement croissante sur } [0\,;1]}$.
Avec $f(0) = 0$ et $f(1) = \dfrac{0{,}96}{0{,}96} = 1$:

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
f	0	↗	1

Partie B

1) D'après l'énoncé, $P_D(T) = 0{,}96$ et $P_{\overline{D}}(T) = 0{,}03$, donc $P_D(\overline{T}) = 1 - 0{,}96 = 0{,}04$ et $P_{\overline{D}}(\overline{T}) = 1 - 0{,}03 = 0{,}97$.



2) On cherche $P(D \cap T)$:

$$P(D \cap T) = P(D) \times P_D(T) = x \times 0{,}96, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{P(D \cap T) = 0{,}96x}.$$

3) D et $\overline{D}$ forment une partition de l'univers ; d'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(D \cap T) + P(\overline{D} \cap T) = 0{,}96x + (1-x) \times 0{,}03 = 0{,}96x + 0{,}03 - 0{,}03x,$$

$$\boxed{P(T) = 0{,}93x + 0{,}03}.$$

4) Ici $x = \dfrac{50}{1\,000} = 0{,}05$. La probabilité cherchée est $P_T(D)$; comme $P(T) = 0{,}93x + 0{,}03 > 0$:

$$P_T(D) = \frac{P(D \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}96x}{0{,}93x + 0{,}03} = f(x), \qquad \text{donc ici} \qquad P_T(D) = f(0{,}05).$$

$$f(0{,}05) = \frac{0{,}96 \times 0{,}05}{0{,}93 \times 0{,}05 + 0{,}03} = \frac{0{,}048}{0{,}076\,5} = \frac{32}{51}, \qquad \boxed{P_T(D) = f(0{,}05) \approx 0{,}63}.$$

Remarque : avec 5 % de sportifs dopés, plus d'un tiers des tests positifs concernent des sportifs non dopés.

5) **a.** D'après la question 4), la valeur prédictive positive est $P_T(D) = f(x)$. Comme $0{,}93x + 0{,}03 > 0$ sur $[0\,;1]$:

$$\begin{aligned}
f(x) \geqslant 0{,}9 &\iff 0{,}96x \geqslant 0{,}9\,(0{,}93x + 0{,}03) && \text{on multiplie par } 0{,}93x + 0{,}03 > 0 \\
&\iff 0{,}96x \geqslant 0{,}837x + 0{,}027 \\
&\iff 0{,}123x \geqslant 0{,}027 && \text{on retranche } 0{,}837x \\
&\iff x \geqslant \frac{0{,}027}{0{,}123} = \frac{9}{41} && \text{on divise par } 0{,}123 > 0.
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{9}{41} \approx 0{,}219\,5$. La valeur prédictive positive est supérieure ou égale à $0{,}9$ dès que $\boxed{x \geqslant 0{,}22}$ (au centième), c'est-à-dire lorsqu'au moins 22 % environ des sportifs testés sont dopés.
Vérification : $f(0{,}21) \approx 0{,}895 < 0{,}9$ et $f(0{,}22) \approx 0{,}900\,3 \geqslant 0{,}9$.

b. En ne testant que les sportifs supposés plus fréquemment dopés, la proportion x de dopés parmi les sportifs testés augmente.
Or la valeur prédictive positive vaut $f(x)$, et la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;1]$ (partie A, question 2).
Donc, si x augmente, $f(x)$ augmente : $\boxed{\text{la valeur prédictive positive du test augmente}}$. Un test positif devient plus fiable.

Exercice 2

8 points

On imagine les boules numérotées (ou on les distingue) : un tirage est un ordre des sept boules, il y en a $7! = 5\,040$. Pour compter, on choisit les boules position par position (principe multiplicatif).

1) **a.** Première boule rouge : 2 choix pour la première boule, puis les 6 boules restantes dans un ordre quelconque, soit $6! = 720$ ordres :

$$2 \times 6! = 2 \times 720 = \boxed{1\,440 \text{ tirages}}.$$

b. Première noire (5 choix), deuxième rouge (2 choix), puis les 5 boules restantes dans un ordre quelconque ($5! = 120$) :

$$5 \times 2 \times 5! = 10 \times 120 = \boxed{1\,200 \text{ tirages}}.$$

c. La première boule rouge est en troisième position : les deux premières sont noires (5×4 choix), la troisième est rouge (2 choix), les 4 dernières sont quelconques ($4! = 24$) :

$$5 \times 4 \times 2 \times 4! = 40 \times 24 = \boxed{960 \text{ tirages}}.$$

d. Trois noires puis une rouge, puis les 3 boules restantes :

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 3! = 120 \times 6 = \boxed{720 \text{ tirages}}.$$

e. Quatre noires puis une rouge, puis les 2 boules restantes :

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2! = 240 \times 2 = \boxed{480 \text{ tirages}}.$$

f. Les cinq noires puis une rouge, puis la dernière boule (rouge) :

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1! = \boxed{240 \text{ tirages}}.$$

Vérification : il n'y a que cinq boules noires, donc la première boule rouge sort au plus tard en sixième position, et

$$1\,440 + 1\,200 + 960 + 720 + 480 + 240 = 5\,040 = 7!.$$

2) a. X prend les valeurs 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Les tirages étant équiprobables :

$$P(X = i) = \frac{\text{nombre de tirages où la première boule rouge est au rang } i}{5\,040},$$

ces nombres venant de la question 1). Par exemple $P(X = 1) = \dfrac{1\,440}{5\,040} = \dfrac{2}{7}$ et $P(X = 3) = \dfrac{960}{5\,040} = \dfrac{4}{21}$.

i	1	2	3	4	5	6
$p_i = P(X = i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{21}$

Vérification : au dénominateur 21, les probabilités valent $\frac{6}{21}, \frac{5}{21}, \frac{4}{21}, \frac{3}{21}, \frac{2}{21}, \frac{1}{21}$, de somme $\dfrac{21}{21} = 1$.

b. *Espérance.*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{6} i\,p_i = \frac{1 \times 6 + 2 \times 5 + 3 \times 4 + 4 \times 3 + 5 \times 2 + 6 \times 1}{21} = \frac{56}{21}, \qquad \boxed{E(X) = \frac{8}{3}}.$$

En moyenne, la première boule rouge sort vers le troisième tirage ($E(X) \approx 2{,}67$).

Variance (formule de König-Huygens).

$$E\left(X^2\right) = \sum_{i=1}^{6} i^2 p_i = \frac{1\times 6 + 4\times 5 + 9\times 4 + 16\times 3 + 25\times 2 + 36\times 1}{21} = \frac{196}{21} = \frac{28}{3},$$

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = \frac{28}{3} - \frac{64}{9} = \frac{84-64}{9}, \qquad \boxed{V(X) = \frac{20}{9}}.$$

Écart-type.

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{20}}{3}, \qquad \boxed{\sigma(X) = \frac{2\sqrt{5}}{3}} \approx 1{,}49.$$