Calculatrice autorisée

Exercice 1

12 points

Partie A

On définit la fonction f sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $f(x) = \dfrac{0{,}96x}{0{,}93x + 0{,}03}$.

1) Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$, $f'(x) = \dfrac{0{,}028\,8}{(0{,}93x + 0{,}03)^2}$.

2) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;1]$.

Partie B

La lutte contre le dopage passe notamment par la réalisation de contrôles antidopage qui visent à déterminer si un sportif a fait usage de substances interdites. Lors d'une compétition rassemblant $1\,000$ sportifs, une équipe médicale teste tous les concurrents. On propose d'étudier la fiabilité de ce test.

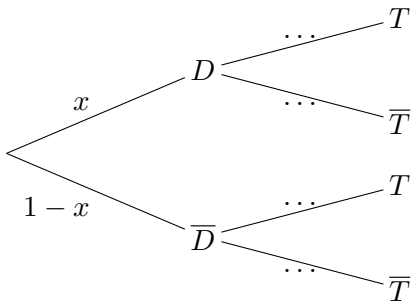
On appelle x le réel compris entre 0 et 1 qui désigne la proportion de sportifs dopés.

Lors de l'élaboration de ce test, on a pu déterminer que :

- la probabilité qu'un sportif soit déclaré positif sachant qu'il est dopé est égale à $0{,}96$;
- la probabilité qu'un sportif soit déclaré positif sachant qu'il n'est pas dopé est égale à $0{,}03$.

On note D l'évènement « le sportif est dopé » et T l'évènement « le test est positif ».

1) Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



2) Déterminer, en fonction de x, la probabilité qu'un sportif soit dopé et ait un test positif.

3) Démontrer que la probabilité de l'évènement T est égale à $0{,}93x + 0{,}03$.

4) Pour cette question uniquement, on suppose qu'il y a 50 sportifs dopés parmi les $1\,000$ testés.
La fonction f désigne la fonction définie à la partie A.
Démontrer que la probabilité qu'un sportif soit dopé sachant que son test est positif est égale à $f(0{,}05)$. *En donner une valeur arrondie au centième.*

5) On appelle valeur prédictive positive d'un test la probabilité que le sportif soit réellement dopé lorsque le résultat du test est positif.

a. Déterminer à partir de quelle valeur de x la valeur prédictive positive du test étudié sera supérieure ou égale à $0{,}9$. Arrondir le résultat au centième.

b. Un responsable de la compétition décide de ne plus tester l'ensemble des sportifs, mais de cibler les sportifs les plus performants, supposés être plus fréquemment dopés.
Quelle est la conséquence de cette décision sur la valeur prédictive positive du test ? *Argumenter en utilisant un résultat de la partie A.*

Exercice 2

8 points

Une urne contient sept boules, cinq noires et deux rouges, indiscernables au toucher.

1) On extrait les sept boules, l'une après l'autre. Il y a donc $7! = 7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 5\,040$ tirages possibles.
Déterminer successivement le nombre de tirages pour lesquels :

a. la première boule tirée est rouge ;

b. la première boule tirée est noire et la deuxième rouge ;

c. la première boule rouge tirée est en troisième position ;

d. la première boule rouge tirée est en quatrième position ;

e. la première boule rouge tirée est en cinquième position ;

f. la première boule rouge tirée est en sixième position.

2) Dans la situation de la question précédente, on appelle X le rang de la première boule rouge tirée.

a. Donner, dans un tableau, la loi de probabilité de la variable aléatoire X ;
les valeurs $p_i = P(X = i)$ seront données sous forme de fractions.

b. Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X. On donnera le détail des calculs et les valeurs exactes.