Première partie : automatismes

6 points

1) On isole x :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}x + 4 \leqslant 0 &\iff -\frac{1}{3}x \leqslant -4 && \text{(on retranche 4)} \\ &\iff x \geqslant 12 && \text{(on multiplie par } -3 < 0 \text{ : le sens change)} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $\boxed{S = [\,12\,;\,+\infty\,[}$.

2) On calcule séparément le numérateur et le dénominateur :

$$a - b = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6} \qquad \text{et} \qquad c + d = -1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}.$$

Diviser par $-\dfrac{3}{4}$, c'est multiplier par son inverse $-\dfrac{4}{3}$:

$$E = \frac{5}{6} \times \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{20}{18}, \quad \text{soit} \quad \boxed{E = -\frac{10}{9}}.$$

3) On développe avec l'identité $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, puis le produit :

$$(3x-2)^2 = 9x^2 - 12x + 4 \qquad \text{et} \qquad 2(x-5)(2x-1) = 2\left(2x^2 - x - 10x + 5\right) = 4x^2 - 22x + 10.$$

Attention au signe $-$ devant le produit :

$$f(x) = 9x^2 - 12x + 4 - 4x^2 + 22x - 10, \quad \text{soit} \quad \boxed{f(x) = 5x^2 + 10x - 6}.$$

Vérification : $f(0) = (-2)^2 - 2 \times (-5) \times (-1) = 4 - 10 = -6$.

4) Les positions p, p' et la distance focale f sont non nulles ; on suppose de plus $p + f \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f} &\iff \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} + \frac{1}{p} && \text{(on ajoute } \tfrac{1}{p}\text{)} \\ &\iff \frac{1}{p'} = \frac{p+f}{pf} && \text{(même dénominateur)} \\ &\iff p' = \frac{pf}{p+f} && \text{(on passe aux inverses)} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{p' = \dfrac{pf}{p+f}}$.

5) On reconnaît $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$ avec $A = 4x - 1$ et $B = 5x + 2$:

$$g(x) = \big[(4x-1) - (5x+2)\big]\big[(4x-1) + (5x+2)\big] = (4x - 1 - 5x - 2)(4x - 1 + 5x + 2),$$

soit $\boxed{g(x) = (-x-3)(9x+1)}$, ou encore $g(x) = -(x+3)(9x+1)$.
Vérification : $g(0) = 1 - 4 = -3$ et $(-3) \times 1 = -3$.

6) Pour tout entier naturel n, $2n-3$ et $2n-1$ sont impairs, donc non nuls. On a

$$u_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)-3} = \frac{1}{2n-1},$$

d'où, au même dénominateur :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} = \frac{(2n-3)-(2n-1)}{(2n-1)(2n-3)},$$

soit $\boxed{u_{n+1} - u_n = \frac{-2}{(2n-1)(2n-3)}}$.

Vérification : $u_0 = -\frac{1}{3}$, $u_1 = -1$ et $u_1 - u_0 = -\frac{2}{3}$; la formule donne $\frac{-2}{(-1)\times(-3)} = -\frac{2}{3}$.

Deuxième partie

14 points

Exercice 1

2,5 points

1) On applique la relation de récurrence avec $n=0$, puis $n=1$:

$$u_1 = 2u_0 - 3\times 0 + 1 = 2 + 1 = \boxed{3}$$
$$u_2 = 2u_1 - 3\times 1 + 1 = 6 - 3 + 1 = \boxed{4}$$

2) La relation $u_{n+1} = 2u_n - 3n + 1$ est vraie pour tout entier naturel n ; on l'écrit au rang $n+1$ (on remplace n par $n+1$) :

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - 3(n+1) + 1 = 2u_{n+1} - 3n - 3 + 1,$$

soit $\boxed{u_{n+2} = 2u_{n+1} - 3n - 2}$.

Vérification avec $n=0$: $2u_1 - 2 = 6 - 2 = 4 = u_2$.

3) On remplace u_{n+1} par $2u_n - 3n + 1$ dans la relation précédente :

$$u_{n+2} = 2\left(2u_n - 3n + 1\right) - 3n - 2 = 4u_n - 6n + 2 - 3n - 2,$$

soit $\boxed{u_{n+2} = 4u_n - 9n}$.

Vérification : avec $n=0$, $4u_0 - 0 = 4 = u_2$.

Avec $n=1$, $4u_1 - 9 = 3$ et, en effet, $u_3 = 2u_2 - 3\times 2 + 1 = 3$.

Exercice 2

3,5 points

1) Pour tout réel x :

$$h(x) = f(x) - g(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x + 2 - \left(-x^2 + x - 3\right) = 2x^3 - 4x^2 - 3x + 2 + x^2 - x + 3,$$

soit $\boxed{h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 5}$.

2) $h(1) = 2 \times 1^3 - 3 \times 1^2 - 4 \times 1 + 5 = 2 - 3 - 4 + 5 = 0$: $\boxed{1 \text{ est une racine de } h(x)}$.

3) On développe la forme proposée :

$$(x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c.$$

Par identification des coefficients avec $2x^3 - 3x^2 - 4x + 5$:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - a = -3 \\ c - b = -4 \\ -c = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = -5 \end{cases}$$

(la troisième équation est bien vérifiée : $c - b = -5 + 1 = -4$). Donc $\boxed{a = 2,\ b = -1,\ c = -5}$ et

$$h(x) = (x-1)(2x^2 - x - 5).$$

4) Signe de $2x^2 - x - 5$. $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 1 + 40 = 41 > 0$: deux racines

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{41}}{4} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{1 + \sqrt{41}}{4}.$$

Le trinôme est du signe de $a = 2 > 0$ (positif) à l'extérieur des racines, négatif entre elles.
Position de 1 par rapport aux racines. Comme $36 < 41 < 49$, on a $6 < \sqrt{41} < 7$. Alors $1 - \sqrt{41} < 0$, donc $x_1 < 0 < 1$; et $1 + \sqrt{41} > 7 > 4$, donc $x_2 > 1$. Ainsi $x_1 < 1 < x_2$.
Signe de $x - 1$: négatif avant 1, positif après. D'où le tableau :

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{41}}{4}$		1		$\frac{1+\sqrt{41}}{4}$		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x^2 - x - 5$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion. $h(x) = f(x) - g(x)$ donne la position relative des deux courbes :

- sur $\left]-\infty\,;\,\frac{1-\sqrt{41}}{4}\right[$ et sur $\left]1\,;\,\frac{1+\sqrt{41}}{4}\right[$, $h(x) < 0$: $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est en dessous de } \mathcal{C}_g}$;
- sur $\left]\frac{1-\sqrt{41}}{4}\,;\,1\right[$ et sur $\left]\frac{1+\sqrt{41}}{4}\,;\,+\infty\right[$, $h(x) > 0$: $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est au-dessus de } \mathcal{C}_g}$;
- les courbes se coupent aux trois points d'abscisses $\dfrac{1-\sqrt{41}}{4}$, 1 et $\dfrac{1+\sqrt{41}}{4}$.

Vérification : $h(0) = 5 > 0$ (et $0 \in \left]\frac{1-\sqrt{41}}{4}\,;\,1\right[$), $h(2) = 16 - 12 - 8 + 5 = 1 > 0$ (et $2 > \frac{1+\sqrt{41}}{4}$ car $\sqrt{41} < 7$).

Exercice 3

5 points

Partie A : cas où $m = 2$

1) Avec $m = 2$: $f(x) = x^2 + (2+1)x + 2 \times 2 - 1$, soit $\boxed{f(x) = x^2 + 3x + 3}$.

2) $a = 1, b = 3, c = 3$: $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{3}{2}$ et $\beta = f(\alpha) = \dfrac{9}{4} - \dfrac{9}{2} + 3 = \dfrac{9 - 18 + 12}{4} = \dfrac{3}{4}$. Donc

$$\boxed{f(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}.$$

Vérification : $\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} = x^2 + 3x + \dfrac{9}{4} + \dfrac{3}{4} = x^2 + 3x + 3$.

3) Pour tout réel x, $\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 \geqslant 0$, donc $f(x) \geqslant \dfrac{3}{4} > 0$: $f(x)$ ne s'annule jamais.
(Autre méthode : $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 3 = -3 < 0$.)
L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution réelle : $\boxed{S = \varnothing}$.

4) On se ramène à f en retranchant 1 :

$$x^2 + 3x + 4 \geqslant 1 \iff x^2 + 3x + 3 \geqslant 0 \iff f(x) \geqslant 0.$$

D'après la question précédente, $f(x) \geqslant \dfrac{3}{4} > 0$ pour tout réel x : l'inéquation est toujours vérifiée, $\boxed{S = \mathbb{R}}$.

Partie B : cas où m est un réel

1) Ici $a = 1, b = m + 1, c = 2m - 1$.

- Si f a deux racines x_1 et x_2, leur produit vaut $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} = 2m - 1$. Elles sont de signes contraires si, et seulement si, ce produit est strictement négatif.
- Réciproquement, si $2m - 1 < 0$, alors $ac = 2m - 1 < 0$, donc $\Delta = b^2 - 4ac > 0$: il y a bien deux racines (distinctes), et leur produit est négatif.

$$2m - 1 < 0 \iff m < \frac{1}{2}.$$

Les racines de f sont de signes contraires si, et seulement si, $\boxed{m < \dfrac{1}{2}}$.

Exemple : pour $m = 0$, $f(x) = x^2 + x - 1$, $f(0) = -1 < 0$, et les racines $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ sont bien de signes contraires.

2) Le nombre de solutions dépend du signe du discriminant :

$$\Delta = (m+1)^2 - 4 \times 1 \times (2m - 1) = m^2 + 2m + 1 - 8m + 4 = m^2 - 6m + 5.$$

Δ est un trinôme du second degré en m ; son propre discriminant vaut $(-6)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16$, d'où ses racines $m_1 = \dfrac{6 - 4}{2} = 1$ et $m_2 = \dfrac{6 + 4}{2} = 5$: $\Delta = (m - 1)(m - 5)$, positif à l'extérieur

des racines (coefficient de m^2 égal à $1 > 0$).

m	$-\infty$		1		5		$+\infty$
Δ		$+$	0	$-$	0	$+$	

- si $m < 1$ ou $m > 5$: $\Delta > 0$, l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions ;
- si $m = 1$ ou $m = 5$: $\Delta = 0$, elle a une seule solution ($x = -1$ pour $m = 1$, $x = -3$ pour $m = 5$) ;
- si $1 < m < 5$: $\Delta < 0$, elle n'a aucune solution.

Cohérence avec la partie A : $m = 2 \in]1\,;\,5[$, et on a bien trouvé $S = \varnothing$ ($\Delta = (2-1)(2-5) = -3$).

Exercice 4

3 points

1) La largeur du chemin doit être strictement supérieure à $0{,}8$ m. Elle doit aussi être strictement inférieure à la largeur du terrain, 12 m (pour $x = 12$, le chemin occuperait tout le terrain et la partie restante serait vide). Donc

$$\boxed{x \in]\,0{,}8\,;\,12\,[}.$$

2) La partie restante $DEGF$ est un rectangle de longueur $EG = 30 - x$ et de largeur $DE = 12 - x$:

$$\mathcal{A} = (30 - x)(12 - x) = 360 - 30x - 12x + x^2 = x^2 - 42x + 360.$$

Alors

$$\mathcal{A} \geqslant 280 \iff x^2 - 42x + 360 \geqslant 280 \iff \boxed{x^2 - 42x + 80 \geqslant 0}.$$

3) $\Delta = (-42)^2 - 4 \times 1 \times 80 = 1\,764 - 320 = 1\,444$, et d'après la table, $1\,444 = 38^2$, donc $\sqrt{\Delta} = 38$.

$$x_1 = \frac{42 - 38}{2} = 2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{42 + 38}{2} = 40.$$

Le trinôme (coefficient de x^2 égal à $1 > 0$) est positif ou nul à l'extérieur des racines :

$$x^2 - 42x + 80 \geqslant 0 \iff x \leqslant 2 \text{ ou } x \geqslant 40.$$

On garde les valeurs de l'intervalle $]0{,}8\,;\,12[$ trouvé à la question 1 ($x \geqslant 40$ est impossible) :

$$\boxed{x \in]\,0{,}8\,;\,2\,]}.$$

La largeur du chemin doit être strictement supérieure à $0{,}8$ m et au plus égale à 2 m.
Vérification : pour $x = 2$, $\mathcal{A} = 28 \times 10 = 280$ m^2 ; pour $x = 1$, $\mathcal{A} = 29 \times 11 = 319$ m$^2 \geqslant 280$; pour $x = 3$, $\mathcal{A} = 27 \times 9 = 243$ m$^2 < 280$.