Calculatrice interdite

Première partie : automatismes

6 points

Chaque question est indépendante.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-\frac{1}{3}x + 4 \leqslant 0$.

2) On considère la relation $E = \frac{a-b}{c+d}$ avec $a = \frac{1}{2}$; $b = -\frac{1}{3}$; $c = -1$ et $d = \frac{1}{4}$.
Calculer E (on donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible).

3) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x-2)^2 - 2(x-5)(2x-1)$.
Développer et réduire $f(x)$.

4) La position p d'un objet et la position p' de son image au travers d'une lentille de distance focale f sont liées par la relation : $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f}$.
Exprimer p' en fonction de p et de f.

5) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (4x-1)^2 - (5x+2)^2$.
Factoriser $g(x)$.

6) Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{1}{2n-3}$.
Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n (on donnera le résultat sous forme d'un quotient).

Deuxième partie

14 points

Exercice 1

2,5 points

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = 2u_n - 3n + 1$.

1) Calculer u_1 et u_2.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et de n.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+2} en fonction de u_n et de n.

Exercice 2

3,5 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x + 2$ et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2 + x - 3$. On appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f et $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de g dans un repère orthonormé.

On s'intéresse à la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{C}_g$.

Soit h la fonction définie pour tout réel x par $h(x) = f(x) - g(x)$.

1) Montrer que, pour tout réel x, $h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 5$.

2) Montrer que 1 est une racine de $h(x)$.

3) On admet que $h(x)$ peut alors s'écrire sous la forme $h(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.
Déterminer les réels a, b et c.

4) Dresser le tableau de signes de $h(x)$ sur $\mathbb{R}$ et conclure.

Exercice 3

5 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + (m+1)x + 2m - 1$, où m est un réel.

Partie A : cas où $m = 2$

1) Donner, pour tout réel x, l'expression de $f(x)$.
2) Déterminer, pour tout réel x, la forme canonique de $f(x)$.
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
4) Résoudre l'inéquation $x^2 + 3x + 4 \geqslant 1$.

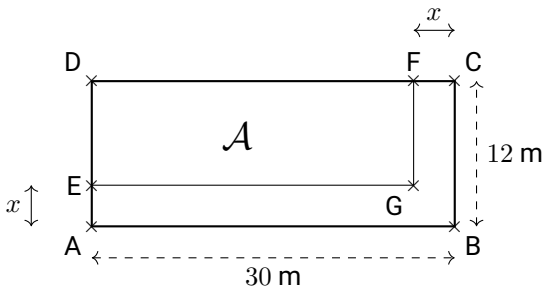
Partie B : cas où m est un réel

1) **Sans calculer les racines**, déterminer pour quelles valeurs de m les racines de f sont de signes contraires.
2) Discuter, selon les valeurs de m, du nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 4

3 points

Un terrain rectangulaire a pour longueur 30 m et pour largeur 12 m. On se propose d'aménager un chemin de largeur x mètres le long de deux côtés consécutifs, comme le montre la figure ci-contre.
La largeur du chemin doit être strictement supérieure à $0{,}8$ m et on souhaite que la partie restante du terrain ait une aire $\mathcal{A}$ supérieure ou égale à 280 m^2.



1) Dans quel intervalle doit se trouver la largeur x du chemin ?
2) Vérifier que la condition sur l'aire $\mathcal{A}$ de la partie restante se traduit par l'inéquation $x^2 - 42x + 80 \geqslant 0$.
3) En déduire les valeurs possibles de la largeur x du chemin.

Aide aux calculs : extrait de la table des carrés parfaits

Nombre	Carré
37	1 369
38	1 444
39	1 521
40	1 600
41	1 681
42	1 764
43	1 849