Exercice 1

10 points

1) La relation de Chasles s'écrit $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XZ} + \overrightarrow{ZY}$: l'extrémité du premier vecteur est l'origine du second.

a. $\boxed{\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QN}}$

b. Le second vecteur commence en F, donc le premier se termine en F ; le résultat va de G à E : $\boxed{\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FE}}$

2) On prend la graduation comme unité et on lit les abscisses : A en 0, B en 3, C en 9.

a. $AB = 3$ et $AC = 9$, les deux vecteurs ont le même sens, donc $\boxed{\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}}$.

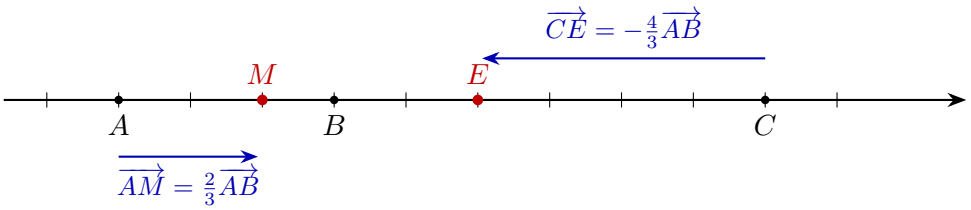
$AC = 9$ et $CB = 6$, mais $\overrightarrow{AC}$ va vers la droite alors que $\overrightarrow{CB}$ va vers la gauche (sens contraires) : $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$, d'où $\boxed{\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}}$.

b. $\overrightarrow{AB}$ correspond à un déplacement de 3 graduations vers la droite, donc $-\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ correspond à un déplacement de $\frac{4}{3} \times 3 = 4$ graduations vers la gauche. Le point E est donc situé 4 graduations à gauche de C : $\boxed{E \text{ a pour abscisse } 5}$ (voir la figure ci-dessous).

3) On utilise la relation de Chasles en passant par A dans $\overrightarrow{MB}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0} &\iff \overrightarrow{MA} + 2\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0}\\ &\iff 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}\\ &\iff -3\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AB}\\ &\iff \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}}$: comme $AB = 3$ graduations, M est à $\frac{2}{3} \times 3 = 2$ graduations à droite de A, soit à l'abscisse 2.



4) On décompose $\overrightarrow{CB}$ avec la relation de Chasles : $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. Alors

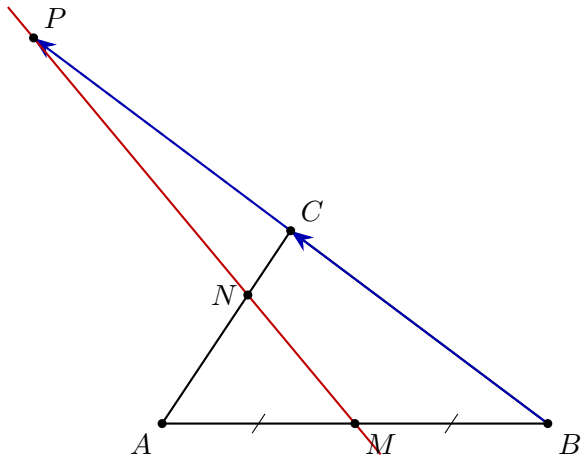
$$\vec{u} = 3\overrightarrow{AB} - 5\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) = 3\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC},$$

d'où $\boxed{\vec{u} = -2\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC}}$.

Exercice 2

10 points

1) Figure : M au milieu de $[AB]$; P tel que $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{BC}$ (on reporte $\overrightarrow{BC}$ à partir de C, donc C est le milieu de $[BP]$) ; N sur $[AC]$ aux deux tiers à partir de A.



2) **Vecteur $\overrightarrow{MN}$.** Par la relation de Chasles, en passant par A :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC},$$

car M est le milieu de $[AB]$, donc $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Ainsi $\boxed{\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}}$.

Vecteur $\overrightarrow{MP}$. P est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$, donc $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\overrightarrow{MP} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}$.

3) On compare les coefficients : $3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$ et $3 \times \frac{2}{3} = 2$, donc

$$3\,\overrightarrow{MN} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MP}, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\overrightarrow{MP} = 3\,\overrightarrow{MN}}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont colinéaires et ont le point M en commun, donc

$\boxed{\text{les points } M, N \text{ et } P \text{ sont alignés.}}$