Exercice 1

2 points

Les points A et B n'ont pas la même abscisse ($0 \neq 2$) : la droite (AB) représente une fonction affine $f : x \mapsto mx + p$.

Coefficient directeur :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-7-1}{2-0} = \frac{-8}{2} = -4.$$

Ordonnée à l'origine : $A(0\,;\,1)$ est sur l'axe des ordonnées, donc $p = f(0) = 1$.

$$\boxed{f(x) = -4x + 1}$$

Vérification : $f(2) = -8 + 1 = -7 = y_B$.

Exercice 2

5 points

1) On développe et on réduit :

$$f(x) = -x^2 - 4x + x^2 + \frac{7}{2}x + 3 = \left(-4 + \frac{7}{2}\right)x + 3 = -\frac{1}{2}x + 3.$$

f s'écrit sous la forme $f(x) = mx + p$ avec $m = -\frac{1}{2}$ et $p = 3$: $\boxed{f \text{ est une fonction affine.}}$

2) La droite coupe l'axe des ordonnées au point $(0\,;\,-2)$: l'ordonnée à l'origine est $p = -2$.
Elle passe aussi par le point $(4\,;\,0)$. En partant de $(0\,;\,-2)$, quand on avance de 4 unités vers la droite, on monte de 2 unités : le coefficient directeur est

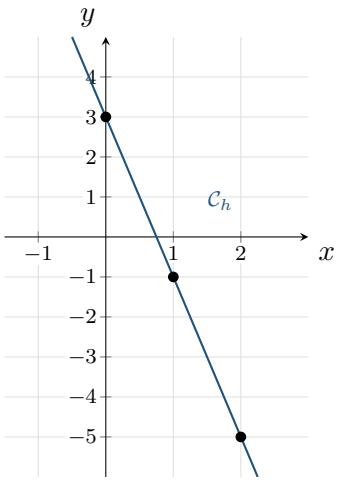
$$m = \frac{0-(-2)}{4-0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2}x - 2}$$

3) $h(x) = -4x + 3$ est de la forme $mx + p$: h est affine, sa représentation graphique est une **droite**. Il suffit donc de placer deux points :

- $h(0) = 3$: la droite passe par $(0\,;\,3)$ (ordonnée à l'origine) ;
- $h(1) = -4 + 3 = -1$: la droite passe par $(1\,;\,-1)$.

Contrôle avec un troisième point : $h(2) = -5$, le point $(2\,;\,-5)$ est bien aligné avec les deux autres.
On peut aussi utiliser le coefficient directeur -4 : depuis $(0\,;\,3)$, quand on avance d'une unité, on descend de 4 unités.



Exercice 3

5 points

1) On étudie le signe de chaque facteur.

- $4x-1>0 \iff 4x>1 \iff x>\dfrac{1}{4}$; $4x-1=0$ pour $x=\dfrac{1}{4}$.
- $-2x+7>0 \iff -2x>-7 \iff x<\dfrac{7}{2}$ (on divise par $-2<0$, le sens change) ; $-2x+7=0$ pour $x=\dfrac{7}{2}$.

On utilise la règle des signes d'un produit :

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$4x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x+7$		$+$		$+$	0	$-$	
$(4x-1)(-2x+7)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Le produit est strictement positif sur $\left]\dfrac{1}{4}\,;\,\dfrac{7}{2}\right[$, strictement négatif sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{1}{4}\right[\cup\left]\dfrac{7}{2}\,;\,+\infty\right[$ et nul en $\dfrac{1}{4}$ et en $\dfrac{7}{2}$.

2) Le quotient n'existe que si $5x-10\neq 0$, c'est-à-dire $x\neq 2$. Pour $x\neq 2$:

$$\frac{17x-29}{5x-10}\geqslant 3 \iff \frac{17x-29}{5x-10}-3\geqslant 0 \iff \frac{17x-29-3(5x-10)}{5x-10}\geqslant 0$$
$$\iff \frac{17x-29-15x+30}{5x-10}\geqslant 0 \iff \frac{2x+1}{5x-10}\geqslant 0.$$

Les deux inéquations sont bien équivalentes.

Signe du quotient. $2x+1>0 \iff x>-\dfrac{1}{2}$ et $5x-10>0 \iff x>2$; la valeur 2 est *interdite* (double barre).

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$5x-10$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{2x+1}{5x-10}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

Le quotient est positif ou nul pour $x\leqslant -\dfrac{1}{2}$ et pour $x>2$ (2 est exclu : le quotient n'y est pas défini) :

$$\boxed{\mathcal{S}=\left]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}\right]\cup\,]2\,;\,+\infty[}$$

Exercice 4

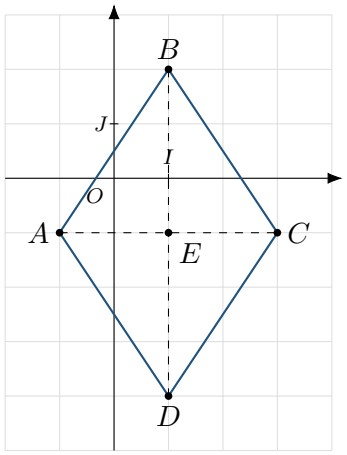
5 points

1) Le repère est orthonormé, on peut calculer des distances.

$$BA = \sqrt{(-1-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13},$$

$$BC = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}.$$

$BA = BC$: le triangle ABC est $\boxed{\text{isocèle en } B.}$



2) $x_E = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{-1+3}{2} = 1,$

$y_E = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{-1+(-1)}{2} = -1.$

Donc $\boxed{E(1\,;\,-1)}$.

3) $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu. Ce milieu est $E(1\,;\,-1)$, donc E est aussi le milieu de $[BD]$:

$$\frac{x_B + x_D}{2} = 1 \iff 1 + x_D = 2 \iff x_D = 1$$
$$\frac{y_B + y_D}{2} = -1 \iff 2 + y_D = -2 \iff y_D = -4$$

donc $\boxed{D(1\,;\,-4)}$

4) $ABCD$ est un parallélogramme (question 3) qui a deux côtés consécutifs de même longueur : $BA = BC = \sqrt{13}$ (question 1). Or un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs égaux est un losange, donc $\boxed{ABCD \text{ est un losange.}}$

Autre méthode : $AD = \sqrt{(1+1)^2 + (-4+1)^2} = \sqrt{13}$ et $DC = \sqrt{(3-1)^2 + (-1+4)^2} = \sqrt{13}$: les quatre côtés mesurent $\sqrt{13}$.

Exercice 5

3 points

$x_A \neq x_B$: la droite (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées ; elle représente une fonction affine, de coefficient directeur $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{12-18}{41-(-1)} = \dfrac{-6}{42} = -\dfrac{1}{7}$.

- Si $x = -1$, le point $C(-1\,;\,3)$ a la même abscisse que A mais pas la même ordonnée : la droite (AC) est parallèle à l'axe des ordonnées, alors que (AB) ne l'est pas. Les points ne sont pas alignés.
- Si $x \neq -1$: A, B, C sont alignés si et seulement si les droites (AB) et (AC) ont le même coefficient directeur :

$$\frac{3-18}{x-(-1)} = -\frac{1}{7} \iff \frac{-15}{x+1} = -\frac{1}{7} \iff x + 1 = 105 \iff x = 104.$$

Les points A, B et C sont alignés pour $\boxed{x = 104}$ et pour cette seule valeur.

Vérification : la droite (AB) a pour équation $y = -\dfrac{1}{7}x + \dfrac{125}{7}$ et $-\dfrac{104}{7} + \dfrac{125}{7} = \dfrac{21}{7} = 3$.