Exercice 1

4 points

Une courbe représente f sur $[-2\,;\,2]$ si, pour *chaque* réel x de $[-2\,;\,2]$, elle contient *exactement un* point d'abscisse x, le point $\big(x\,;\,f(x)\big)$, et aucun point d'abscisse hors de $[-2\,;\,2]$. Elle doit en particulier passer par les neuf points du tableau.

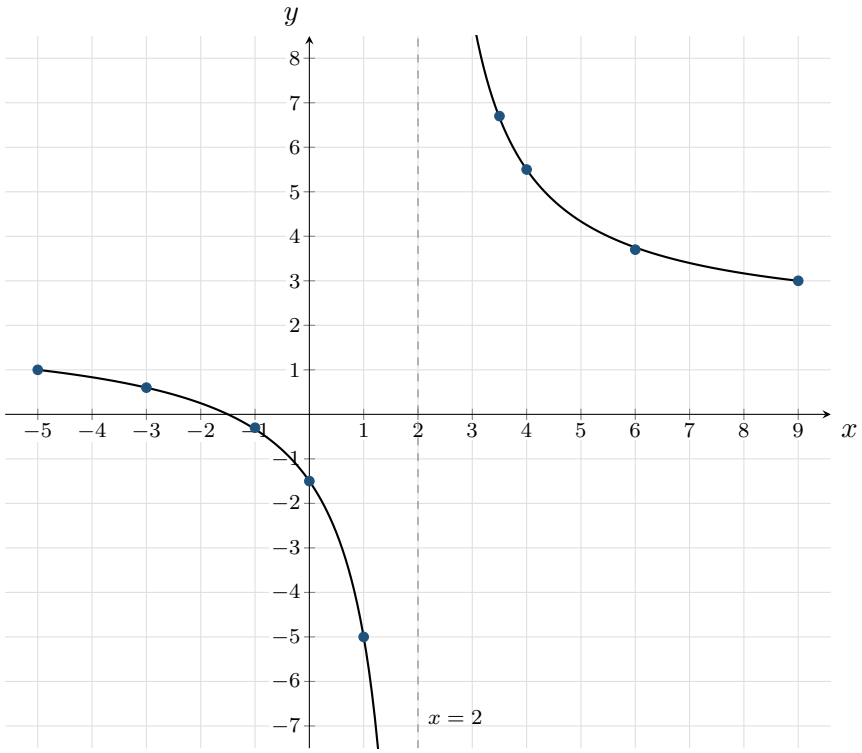
- **Courbe 1 :** elle n'est formée que des neuf points du tableau. Or f est définie sur tout l'intervalle $[-2\,;\,2]$: par exemple, aucun point n'a pour abscisse $0{,}25$, alors que $f(0{,}25)$ existe.
  La courbe 1 ne peut pas représenter f.
- **Courbe 2 :** elle passe bien par les neuf points, mais elle relie $(0{,}5\,;\,0)$ à $(1{,}5\,;\,1)$ puis revient vers $(1\,;\,2)$. La droite verticale d'équation $x = 1{,}25$ coupe alors la courbe en plusieurs points (trois) : le réel $1{,}25$ aurait plusieurs images, ce qui est impossible pour une fonction.
  La courbe 2 ne peut pas représenter f.
- **Courbe 3 :** elle passe par les neuf points du tableau, elle est tracée exactement pour x allant de -2 à 2, et toute droite verticale d'équation $x = a$ avec $a \in [-2\,;\,2]$ la coupe en un seul point.
  La courbe 3 peut représenter f.
- **Courbe 4 :** elle passe par les neuf points, mais elle se prolonge à gauche de $x = -2$ et à droite de $x = 2$. Elle contient donc des points dont l'abscisse n'appartient pas à l'ensemble de définition $[-2\,;\,2]$ de f.
  La courbe 4 ne peut pas représenter f.

Exercice 2

4 points

Choix de l'échelle. Les abscisses vont de -5 à 9 et les ordonnées de -5 à $6{,}7$: on prend 1 cm pour une unité sur chaque axe (la courbe tient dans un rectangle de 15 cm sur 13 cm).

Tracé. On place les neuf points du tableau, puis on les relie par une courbe régulière (sans segments). La fonction n'est pas définie en 2 : la courbe est formée de **deux morceaux** séparés, l'un pour $x < 2$ (points d'abscisses -5 à 1), l'autre pour $x > 2$ (points d'abscisses $3{,}5$ à 9). On ne relie surtout pas le point $(1\,;\,-5)$ au point $(3{,}5\,;\,6{,}7)$, et la courbe ne coupe jamais la droite verticale d'équation $x = 2$.



Les morceaux de courbe tracés au-delà des points extrêmes du tableau (vers $x = 2$) ne sont qu'une indication : le tableau seul ne permet pas de les connaître précisément.

Exercice 3

3 points

1) Les solutions de $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses. On lit trois points :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-2{,}4\,;\,0\,;\,0{,}4\}}$$ (valeurs approchées lues au dixième, sauf 0).

2) Les solutions de $f(x) > 2$ sont les abscisses des points de la courbe situés *strictement au-dessus* de la droite horizontale d'équation $y = 2$.
La courbe coupe cette droite aux points d'abscisses -2, -1 et 1 ; elle est au-dessus entre -2 et -1, puis à partir de 1. Les bornes sont exclues (inégalité stricte) :

$$\boxed{\mathcal{S} =]-2\,;\,-1[\ \cup\ ]1\,;\,+\infty[}$$

Exercice 4

9 points

1) M se déplace sur le segment $[AD]$, donc $x = AM$ varie de 0 (quand $M = A$) à $AD = 6$ (quand $M = D$).
L'ensemble de définition de f est $\boxed{[0\,;\,6]}$.

2) La partie hachurée est formée de deux triangles rectangles.

- Le triangle AMP est la moitié du carré $AMNP$ de côté x : son aire vaut $\dfrac{x^2}{2}$.
- Le triangle FNE est la moitié du rectangle $NECF$, de côtés $NE = AB - AP = 8 - x$ et $NF = AD - AM = 6 - x$: son aire vaut $\dfrac{(8-x)(6-x)}{2}$.

On développe : $(8-x)(6-x) = 48 - 8x - 6x + x^2 = x^2 - 14x + 48$. Donc

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^2 - 14x + 48}{2} = \frac{2x^2 - 14x + 48}{2}, \quad \text{soit} \quad \boxed{f(x) = x^2 - 7x + 24.}$$

3) Par exemple $f(2) = 2^2 - 7 \times 2 + 24 = 4 - 14 + 24 = 14$.

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	24	18	14	12	12	14	18

4) D'après le tableau, $f(2) = f(5) = 14$; les valeurs de f sont supérieures à 14 pour x entre 0 et 2 et pour x entre 5 et 6, inférieures à 14 entre 2 et 5. Sur $[0\,;\,6]$, on conjecture :

$$\boxed{\mathcal{S} = [0\,;\,2[\ \cup\ ]5\,;\,6]}$$

Contrôle par le calcul : $f(x) - 14 = x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$, produit strictement positif quand les deux facteurs ont le même signe, c'est-à-dire pour $x < 2$ ou $x > 5$.

5) L'aire du rectangle vaut $8 \times 6 = 48$ cm^2 ; le tiers vaut $\dfrac{48}{3} = 16$ cm^2. On résout sur $[0\,;\,6]$:

$$f(x) = 16 \iff x^2 - 7x + 24 = 16 \iff x^2 - 7x + 8 = 0.$$

À la calculatrice : on trace la courbe de f et la droite d'équation $y = 16$ (ou on fait un tableau de valeurs de f avec un pas de $0{,}01$). Les deux courbes se coupent en deux points, d'abscisses environ $1{,}44$ et $5{,}56$.
Par le calcul : $x^2 - 7x + 8 = (x - 3{,}5)^2 - 12{,}25 + 8 = (x - 3{,}5)^2 - 4{,}25$, donc

$$x^2 - 7x + 8 = 0 \iff (x - 3{,}5)^2 = 4{,}25 \iff x - 3{,}5 = \sqrt{4{,}25} \text{ ou } x - 3{,}5 = -\sqrt{4{,}25},$$

soit $x = 3{,}5 - \sqrt{4{,}25} \approx 1{,}438$ ou $x = 3{,}5 + \sqrt{4{,}25} \approx 5{,}562$. Ces deux valeurs appartiennent à $[0\,;\,6]$.
Il faut placer le point M à environ $\boxed{1{,}44 \text{ cm}}$ ou $\boxed{5{,}56 \text{ cm}}$ du point A.