Rappels. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Un nombre est *décimal* s'il peut s'écrire $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$; il est *rationnel* s'il peut s'écrire $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$.

Exercice 1

3 points

1)
- -2 est un entier négatif : $\boxed{-2 \in \mathbb{Z}}$ (et $-2 \notin \mathbb{N}$).
- $\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0{,}2$: $\boxed{\frac{1}{5} \in \mathbb{D}}$ (et ce n'est pas un entier).
- $\sqrt{25} = 5$: $\boxed{\sqrt{25} \in \mathbb{N}}$.
- π n'est pas rationnel : $\boxed{\pi \in \mathbb{R}}$ (et $\pi \notin \mathbb{Q}$).

2) Il faut un nombre rationnel qui n'est pas décimal, par exemple $\boxed{x = \frac{1}{3}}$ (voir l'exercice 5). D'autres réponses conviennent : $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{5}{6}$…

Exercice 2

3 points

1) On multiplie le numérateur et le dénominateur par 25 :

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 25}{4 \times 25} = \frac{75}{100} = \frac{75}{10^2}.$$

$\frac{3}{4}$ s'écrit sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a = 75 \in \mathbb{Z}$ et $n = 2 \in \mathbb{N}$, donc $\boxed{\frac{3}{4} \in \mathbb{D}}$ (et $\frac{3}{4} = 0{,}75$).

2) $0{,}45 = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$: c'est le quotient de l'entier 45 par l'entier non nul 100, donc $\boxed{0{,}45 \in \mathbb{Q}}$.
Remarque : plus généralement, tout nombre décimal est rationnel ($\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$).

Exercice 3

3 points

Pour montrer qu'une proposition générale est fausse, il suffit de trouver *un* exemple pour lequel elle n'est pas vérifiée.

1) 2 et 4 sont deux entiers pairs consécutifs, et $2 \times 4 = 8$. Or 8 n'est pas un multiple de 16 ($0 < 8 < 16$). L'affirmation est donc $\boxed{\text{fausse}}$.
Remarque : le produit de deux entiers pairs consécutifs est toujours un multiple de 8 : $2k(2k+2) = 4k(k+1)$, et l'un des deux entiers consécutifs k ou $k+1$ est pair.

2) $0{,}005$ est un nombre décimal ($0{,}005 = \frac{5}{10^3}$) et $0{,}005 \times 100 = 0{,}5$, qui n'est pas un nombre entier. L'affirmation est donc $\boxed{\text{fausse}}$.

Exercice 4

7 points

1) Les entiers naturels sont les entiers positifs ou nuls 0, 1, 2, … Or $-5 < 0$, donc -5 n'est pas un entier naturel : FAUX ($-5 \in \mathbb{Z}$ mais $-5 \notin \mathbb{N}$).

2) Un entier a est un multiple de 3 s'il existe un entier k tel que $a = 3k$. Or $45 = 3 \times 15$ avec $15 \in \mathbb{Z}$: VRAI.

3) Un entier a est impair s'il existe un entier k tel que $a = 2k + 1$. Or $41 = 2 \times 20 + 1$ avec $20 \in \mathbb{Z}$: VRAI.

4) $|-7 - 2| = |-9| = 9$. Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs positifs, 1 et lui-même. Or $9 = 3 \times 3$: 9 admet trois diviseurs positifs, 1, 3 et 9. Il n'est pas premier : FAUX.

5) La parité (pair ou impair) n'est définie que pour les entiers : un nombre pair s'écrit $2k$ avec k entier. Or $1{,}4$ n'est pas un entier ; en écrivant $1{,}4 = 2 \times 0{,}7$, on a bien $0{,}7 \notin \mathbb{Z}$. Donc $1{,}4$ n'est pas pair : FAUX.

Exercice 5

4 points

Démonstration par l'absurde. Supposons que $\dfrac{1}{3}$ soit un nombre décimal. Il existe alors un entier a et un entier naturel n tels que

$$\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}.$$

En multipliant les deux membres par 3×10^n, on obtient

$$10^n = 3a.$$

- Comme a est un entier, $3a$ est un multiple de 3, donc 10^n serait un multiple de 3.
- Or $10^n = 1\underbrace{0\ldots0}_{n \text{ zéros}}$ a pour somme des chiffres 1, qui n'est pas un multiple de 3 : 10^n n'est donc pas divisible par 3.

On aboutit à une contradiction. L'hypothèse de départ est donc fausse :

$$\boxed{\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}}.$$

Autre justification du second point : $10^n = 2^n \times 5^n$; sa décomposition en facteurs premiers ne contient que des 2 et des 5, donc 3 ne divise pas 10^n.