Exercice 1 : Des statistiques

3 points

1) L'effectif total est $N = 4 + 5 + 6 + 10 + 3 + 2 = 30$.

Moyenne.

$$\overline{x} = \frac{2 \times 4 + 3 \times 5 + 5 \times 6 + 6 \times 10 + 7 \times 3 + 8 \times 2}{30} = \frac{8 + 15 + 30 + 60 + 21 + 16}{30} = \frac{150}{30},$$

soit $\boxed{\overline{x} = 5}$.

Écart-type. On calcule d'abord la variance V, moyenne des carrés des écarts à la moyenne :

$$V = \frac{4 \times (2-5)^2 + 5 \times (3-5)^2 + 6 \times (5-5)^2 + 10 \times (6-5)^2 + 3 \times (7-5)^2 + 2 \times (8-5)^2}{30}$$

$$V = \frac{4 \times 9 + 5 \times 4 + 6 \times 0 + 10 \times 1 + 3 \times 4 + 2 \times 9}{30} = \frac{36 + 20 + 0 + 10 + 12 + 18}{30} = \frac{96}{30} = 3{,}2.$$

L'écart-type est la racine carrée de la variance :

$$\boxed{\sigma = \sqrt{3{,}2} \approx 1{,}79}.$$

2) Ajouter 2 points à toutes les notes décale toute la série de 2 :

- la moyenne augmente aussi de 2 points : $\boxed{\overline{x}' = 5 + 2 = 7}$;
- les écarts à la moyenne $x_i - \overline{x}$ ne changent pas (chaque note et la moyenne augmentent de 2), donc la dispersion est la même : $\boxed{\text{l'écart-type est inchangé}}$, $\sigma' = \sigma \approx 1{,}79$.

Exercice 2 : Effet de structure

3 points

1) L'entreprise compte $2 + 6 = 8$ employés. Le salaire moyen est

$$\frac{2 \times 6\,000 + 6 \times 1\,400}{8} = \frac{12\,000 + 8\,400}{8} = \frac{20\,400}{8},$$

soit $\boxed{2\,550 \text{ euros}}$.

2) **Nouveaux salaires.** Augmenter de $10\,\%$ revient à multiplier par $1{,}1$:

- cadre : $6\,000 \times 1{,}1 = 6\,600$ euros ;
- ouvrier : $1\,400 \times 1{,}1 = 1\,540$ euros.

Nouveaux effectifs. Toujours 2 cadres, et $6 + 5 = 11$ ouvriers, soit 13 employés.

Nouveau salaire moyen.

$$\frac{2 \times 6\,600 + 11 \times 1\,540}{13} = \frac{13\,200 + 16\,940}{13} = \frac{30\,140}{13} \approx 2\,318{,}46 \text{ euros}.$$

Comme $2\,318{,}46 < 2\,550$, le salaire moyen de l'entreprise a bien diminué : $\boxed{\text{l'affirmation est vraie.}}$

Explication : chaque salarié gagne $10\,\%$ de plus, mais la part des ouvriers, les moins bien payés, passe de $\frac{6}{8} = 75\,\%$ à $\frac{11}{13} \approx 85\,\%$ des employés. Ce changement de structure de l'effectif fait baisser la moyenne : c'est un *effet de structure*.

Exercice 3 : Un vrai-faux

4 points

On utilise $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}x_N - x_M\\ y_N - y_M\end{pmatrix}$ et, le repère étant orthonormé, $MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$.

1) $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}5-1\\1-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$, donc $AD = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$: VRAI.

2) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-1\\4-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}5-8\\1-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$. Les coordonnées sont différentes (les vecteurs sont opposés) : FAUX.

3) Le milieu de $[AE]$ a pour coordonnées $\left(\frac{1+9}{2}\,;\,\frac{2+0}{2}\right) = (5\,;\,1)$, ce sont celles de D : VRAI.

4) $\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$, donc $\left\|\overrightarrow{OD}\right\| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$: VRAI.

5) $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}9-1\\0-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}$: VRAI.

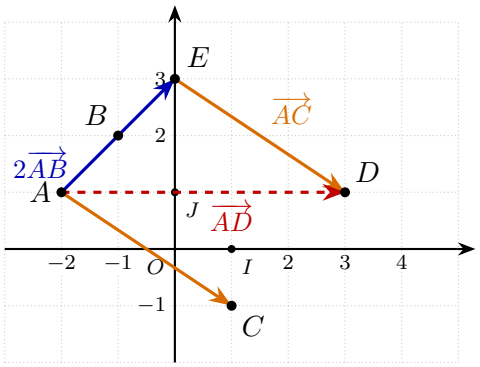
6) $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}-14-1\\-8-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-15\\-10\end{pmatrix}$; l'ordonnée est -10 et non 10 : FAUX.

7) $2\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2\times 4\\2\times(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}$, ce sont les coordonnées de $\overrightarrow{AE}$: $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AD}$, VRAI (ce qui confirme que D est le milieu de $[AE]$).

8) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}8-5\\3-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$: $ABCD$ est un parallélogramme, VRAI.

Exercice 4 : Dans un repère

4 points



1) Pour aller de A à B, on avance de 1 unité vers la droite et de 1 unité vers le haut. On applique deux fois ce déplacement à partir de A : on obtient $E(0\,;\,3)$.

2) Pour aller de A à C, on avance de 3 unités vers la droite et de 2 unités vers le bas. On applique ce déplacement à partir de E : le vecteur $\overrightarrow{AC}$ d'origine E a pour extrémité le point $(3\,;\,1)$.

3) D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC}$: le point D est l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{AC}$ tracé à partir de E (figure ci-dessus).

4) On lit $\boxed{D(3\,;\,1)}$.

5) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-(-2)\\2-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $2\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\times 1\\2\times 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1-(-2)\\-1-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$,

$$2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2+3\\2+(-2)\end{pmatrix}, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}}.$$

6) Par définition de D, $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, donc $\boxed{\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}}$.

En notant $D(x_D\,;\,y_D)$, on a $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}x_D+2\\y_D-1\end{pmatrix}$, d'où

$$x_D + 2 = 5 \iff x_D = 3 \qquad \text{et} \qquad y_D - 1 = 0 \iff y_D = 1.$$

Ainsi $\boxed{D(3\,;\,1)}$, ce qui confirme la lecture graphique de la question 4).

Exercice 5 : Un algorithme

3 points

La fonction calcule $x = x_B - x_A$ et $y = y_B - y_A$: elle renvoie bien les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.

1) Ici $x_A = -4$, $y_A = 5$, $x_B = 2$ et $y_B = -3$:

$$x = 2 - (-4) = 6 \qquad \text{et} \qquad y = -3 - 5 = -8.$$

La fonction renvoie $\boxed{(6,\ -8)}$.

2) Ici $x_A = -1$, $y_A = 1$, $x_B = 0$ et la fonction renvoie $(1,\ 1)$. On vérifie $x = 0 - (-1) = 1$, puis

$$y = y_B - 1 = 1 \iff \boxed{y_B = 2}.$$

3) Exemple 1 : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$; exemple 2 : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$. Comme $3 = -3\times(-1)$ pour les deux coordonnées,

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\,(\text{exemple } 2) = -3\,\overrightarrow{AB}\,(\text{exemple } 1)}.$$

Exercice 6 : Structure d'un établissement

3 points

1) **Effectif total :** $490 + 455 + 500 + 240 = 1\,685$ élèves.
Élèves majeurs :

- classe préparatoire : les 240 étudiants ;
- Terminale : $1\,\%$ de 500, soit $\dfrac{1}{100} \times 500 = 5$ élèves ;
- Première : 2 élèves ; Seconde : aucun.

Il y a donc $240 + 5 + 2 = 247$ élèves majeurs. La proportion d'élèves majeurs est

$$p = \frac{247}{1\,685} \approx 0{,}146\,59, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p \approx 0{,}147} \text{ à } 0{,}001 \text{ près.}$$

2) Proportion de proportion : la proportion d'élèves qui ont le permis *et* une voiture parmi les élèves majeurs est $0{,}8 \times 0{,}05 = 0{,}04$. Rapportée à tout l'établissement :

$$q = \frac{247}{1\,685} \times 0{,}8 \times 0{,}05 \approx 0{,}005\,86.$$

Environ $\boxed{0{,}6\,\%}$ des élèves de l'établissement ont une voiture (à $0{,}1\,\%$ près), soit environ 10 élèves ($247 \times 0{,}04 \approx 9{,}9$).