Exercice 1

3 points

L'équation (E) est du second degré à coefficients réels : $a = 1$, $b = -2\cos(\theta)$, $c = 1$. Son discriminant vaut

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4\cos^2(\theta) - 4 = -4\left(1 - \cos^2(\theta)\right) = -4\sin^2(\theta) = (2i\sin(\theta))^2.$$

On distingue deux cas selon le signe de Δ.

Cas $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. Alors $\sin(\theta) = 0$, donc $\Delta = 0$ et (E) a une solution double $z_0 = -\dfrac{b}{2a} = \cos(\theta)$:

- si $\theta = 0$: (E) s'écrit $z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2 = 0$, et $\boxed{S = \{1\}}$;
- si $\theta = \pi$: (E) s'écrit $z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2 = 0$, et $\boxed{S = \{-1\}}$.

Cas $\theta \in]-\pi\,;\,0[\cup]0\,;\,\pi[$. Alors $\sin(\theta) \neq 0$, donc $\Delta = -4\sin^2(\theta) < 0$ et (E) admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{2\cos(\theta) - 2i\sin(\theta)}{2} = \cos(\theta) - i\sin(\theta) \qquad \text{et} \qquad z_2 = \overline{z_1} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

$$\boxed{S = \{\cos(\theta) - i\sin(\theta)\,;\,\cos(\theta) + i\sin(\theta)\}}$$

Vérification : $z_1 + z_2 = 2\cos(\theta)$ et $z_1 z_2 = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, qui sont bien $-\dfrac{b}{a}$ et $\dfrac{c}{a}$. Ces formules donnent aussi les cas $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, où les deux solutions sont confondues.

Exercice 2

6 points

1) Soit $z \in \mathbb{C}$. On démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ ».
Initialisation. Pour $n = 0$: $\overline{z^0} = \overline{1} = 1$ et $\overline{z}^0 = 1$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $\overline{z^n} = \overline{z}^n$. Alors

$$\begin{aligned}
\overline{z^{n+1}} &= \overline{z^n \times z} \\
&= \overline{z^n} \times \overline{z} \quad \text{(le conjugué d'un produit est le produit des conjugués)} \\
&= \overline{z}^n \times \overline{z} \quad \text{(hypothèse de récurrence)} \\
&= \overline{z}^{n+1}.
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion. $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété est héréditaire, donc $\boxed{\forall z \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \overline{z^n} = \overline{z}^n}$

2) **a.** Soit z une solution de (E) : $z^3 - z^2 + z - 1 = 0$. On passe au conjugué :

$$\begin{aligned}
\overline{z^3 - z^2 + z - 1} = \overline{0} &\iff \overline{z^3} - \overline{z^2} + \overline{z} - \overline{1} = 0 \quad \text{(conjugué d'une somme)} \\
&\iff \overline{z}^3 - \overline{z}^2 + \overline{z} - 1 = 0 \quad \text{(question 1, et } \overline{1} = 1\text{)}
\end{aligned}$$

$\boxed{\overline{z} \text{ est donc aussi une solution de } (E).}$

b. $i^3 - i^2 + i - 1 = -i + 1 + i - 1 = 0$, donc $\boxed{i \text{ est solution de } (E).}$

D'après la question précédente, $\overline{i} = -i$ est aussi solution. On factorise par $z-1$ (on remarque que $1^3 - 1^2 + 1 - 1 = 0$) :

$$z^3 - z^2 + z - 1 = z^2(z-1) + (z-1) = (z-1)(z^2+1) = (z-1)(z-i)(z+i).$$

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul :

$$(E) \iff z-1=0 \text{ ou } z-i=0 \text{ ou } z+i=0, \qquad \boxed{S = \{1\,;\, i\,;\, -i\}}$$

Exercice 3

6 points

1) On regroupe les termes en z :

$$\begin{aligned} 4iz + 2i = 1 - z + i &\iff 4iz + z = 1 + i - 2i \\ &\iff (1+4i)z = 1 - i \\ &\iff z = \frac{1-i}{1+4i} = \frac{(1-i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)} = \frac{1-4i-i+4i^2}{1^2+4^2} = \frac{-3-5i}{17} \end{aligned}$$

$$\boxed{S = \left\{-\frac{3}{17} - \frac{5}{17}\,i\right\}}$$

2) On pose $z = x + iy$ avec x, y réels ; alors $z\overline{z} = x^2 + y^2$.

$$z\overline{z} = z + 2 \iff x^2 + y^2 = x + 2 + iy \iff (x^2 + y^2 - x - 2) + i(-y) = 0.$$

Un nombre complexe est nul si et seulement si ses parties réelle et imaginaire sont nulles :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x - 2 = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Pour $x^2 - x - 2 = 0$: $\Delta = 1 + 8 = 9$, donc $x = \dfrac{1-3}{2} = -1$ ou $x = \dfrac{1+3}{2} = 2$.

$$\boxed{S = \{-1\,;\, 2\}}$$

Vérification : $(-1) \times (-1) = 1 = -1 + 2$ *et* $2 \times 2 = 4 = 2 + 2$.

3) Les dénominateurs $i-1$ et $1+i$ sont non nuls. On calcule leurs inverses :

$$\frac{1}{i-1} = \frac{-1-i}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{-1-i}{2} \quad ; \quad \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2}.$$

Donc $\dfrac{1}{i-1} - \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{-1-i-1+i}{2} = -1$, et

$$\begin{aligned}\frac{z}{i-1} - i = \frac{z}{1+i} + i &\iff z\left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{1+i}\right) = 2i \\ &\iff -z = 2i \\ &\iff z = -2i\end{aligned}$$

$$\boxed{S = \{-2i\}}$$

Vérification : $\dfrac{-2i}{i-1} = -2i \times \dfrac{-1-i}{2} = i + i^2 = -1 + i$, *donc le membre de gauche vaut* -1*;* $\dfrac{-2i}{1+i} = -2i \times \dfrac{1-i}{2} = -i + i^2 = -1 - i$, *donc le membre de droite vaut* -1.

Exercice 4

5 points

1) On écrit $Z = a + ib$ avec a, b réels ; alors $\overline{Z} = a - ib$.

$$Z = \overline{Z} \iff a + ib = a - ib \iff 2ib = 0 \iff b = 0 \iff Z \text{ est réel.}$$

$\boxed{Z \text{ réel} \iff Z = \overline{Z}}$

2) Soit $z \neq 2$. Le conjugué d'un quotient est le quotient des conjugués, donc $\overline{Z} = \dfrac{3\overline{z}+1}{\overline{z}-2}$, avec $\overline{z} - 2 = \overline{z-2} \neq 0$. Par produit en croix (dénominateurs non nuls) :

$$\begin{aligned}Z = \overline{Z} &\iff (3z+1)(\overline{z}-2) = (3\overline{z}+1)(z-2) \\ &\iff 3z\overline{z} - 6z + \overline{z} - 2 = 3z\overline{z} - 6\overline{z} + z - 2 \\ &\iff -7z + 7\overline{z} = 0 \\ &\iff z = \overline{z} \\ &\iff z \text{ est réel.}\end{aligned}$$

D'après la question 1, Z est réel si et seulement si z est un réel, z devant être différent de 2 :

$$\boxed{E = \mathbb{R} \setminus \{2\}}$$

Vérification avec $z = x + iy$ *: on trouve* $\mathrm{Im}(Z) = \dfrac{-7y}{(x-2)^2 + y^2}$*, nul si et seulement si* $y = 0$.