Calculatrice interdite

Exercice 1

3 points

Soit θ un réel de l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ et soit (E) l'équation d'inconnue z :

$$z^2 - 2\cos(\theta)\,z + 1 = 0.$$

Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2

6 points

On rappelle que, pour un nombre complexe $z = a + ib$ (a et b réels), le conjugué de z est $\overline{z} = a - ib$.

1) Démontrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad \overline{z^n} = \overline{z}^{\,n}.$$

2) Soit (E) l'équation : $z^3 - z^2 + z - 1 = 0$.

a. Démontrer que si z est une solution de (E) alors $\overline{z}$ est également une solution de (E). *(On pourra utiliser toutes les propriétés du conjugué : celle qui a été démontrée à la question précédente et les autres propriétés algébriques.)*

b. Montrer que i est une solution de (E), puis résoudre (E).

Exercice 3

6 points

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $4iz + 2i = 1 - z + i$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z\overline{z} = z + 2$.

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\dfrac{z}{i-1} - i = \dfrac{z}{1+i} + i$.

Exercice 4

5 points

Pour tout nombre complexe z différent de 2, on considère :

$$Z = \frac{3z+1}{z-2}.$$

1) Démontrer la propriété : Z réel $\iff Z = \overline{Z}$.

2) Utiliser cette propriété pour déterminer l'ensemble E des nombres complexes z pour lesquels Z est réel.