Pour chaque question, la bonne réponse est encadrée ; la justification, non demandée dans le sujet, est donnée pour comprendre.

Exercice 1

6,5 points

1. **Réponse D.** Pour chaque point, on cherche t grâce à la première coordonnée $x = 1 + t$, puis on contrôle les deux autres :
   - $(1\,;\,3\,;\,-1)$: $t = 0$ donne $y = -1 \neq 3$; $\quad (1\,;\,-1\,;\,0)$: $t = 0$ donne $z = 2 \neq 0$;
   - $(0\,;\,-4\,;\,-3)$: $t = -1$ donne $y = -4$ mais $z = 3 \neq -3$;
   - $(4\,;\,8\,;\,-1)$: $t = 3$ donne $y = -1 + 9 = 8$ et $z = 2 - 3 = -1$: le point appartient à (d).

2. **Réponse C.** Les coefficients de l'équation donnent un vecteur normal $\vec{n}_0(2\,;\,-3\,;\,-1)$. Or $(8\,;\,-12\,;\,-4) = 4\,\vec{n}_0$: ce vecteur est colinéaire à $\vec{n}_0$, donc normal à $\mathcal{P}$. Les autres propositions ne sont pas colinéaires à $\vec{n}_0$ (par exemple $(4\,;\,-6\,;\,2) = 2 \times (2\,;\,-3\,;\,1)$: mauvais signe sur la 3e coordonnée).

3. **Réponse D.** Dans un repère orthonormé :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 1 + 1 \times 3 + (-1) \times 2 = 2 + 3 - 2 = \boxed{3}.$$

4. **Réponse D.** Les vecteurs normaux $\vec{n}(1\,;\,-2\,;\,1)$ et $\vec{n}'(2\,;\,-1\,;\,3)$ ne sont pas colinéaires ($\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{-2}$) : les plans sont sécants selon une droite. Les réponses A (vide) et B (un point) sont donc fausses.

   Pour la réponse C : le point $\left(-\frac{5}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,0\right)$ appartient bien aux deux plans ($-\frac{5}{3} - \frac{4}{3} + 3 = 0$ et $-\frac{10}{3} - \frac{2}{3} + 4 = 0$), mais le vecteur directeur proposé $\vec{w}(5\,;\,-1\,;\,-7)$ vérifie

$$\vec{n} \cdot \vec{w} = 5 + 2 - 7 = 0 \qquad \text{et} \qquad \vec{n}' \cdot \vec{w} = 10 + 1 - 21 = -10 \neq 0.$$

   $\vec{w}$ n'est pas orthogonal à $\vec{n}'$: la droite proposée n'est pas contenue dans $\mathcal{P}'$. Aucune des trois réponses n'est exacte.

   Remarque : l'intersection est la droite passant par $\left(-\frac{5}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,0\right)$ et dirigée par $(-5\,;\,-1\,;\,3)$.

5. **Réponse C.** Aucun des vecteurs n'est colinéaire à un autre (par exemple $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{2}$), donc A est fausse. On cherche a et b tels que $\vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$:

$$\begin{cases} a + 2b = -2 \\ 2a - b = 6 \\ -a + b = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} 3b = -6 \quad (L_1 + L_3) \\ a = b + 4 \\ 2a - b = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -2 \\ a = 2 \\ 4 + 2 = 6 \text{ (vrai)} \end{cases}$$

   Donc $\vec{w} = 2\vec{u} - 2\vec{v}$: les trois vecteurs sont coplanaires.

Exercice 2

2,5 points

On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA'}\right)$ (le cube est d'arête 1) : $B(1\,;\,0\,;\,0)$, $C(1\,;\,1\,;\,0)$, $D(0\,;\,1\,;\,0)$, $A'(0\,;\,0\,;\,1)$, $B'(1\,;\,0\,;\,1)$, $C'(1\,;\,1\,;\,1)$.

6. **Réponse C.** $\overrightarrow{AC}(1\,;\,1\,;\,0)$ et $\overrightarrow{C'B'}(0\,;\,-1\,;\,0)$, donc

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{C'B'} = 1\times 0 + 1\times(-1) + 0\times 0 = \boxed{-1}.$$

Sans repère : $\overrightarrow{C'B'} = \overrightarrow{CB}$, et le projeté orthogonal de C sur (CB) est C, celui de A est B : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CB} = -BC^2 = -1$.

7. **Réponse B.** I est le milieu de $[A'B']$: $I\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,1\right)$. Alors

$$\overrightarrow{ID}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-1\end{pmatrix},\qquad \overrightarrow{IB}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-1\end{pmatrix},\qquad \overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IB} = -\frac{1}{4}+0+1 = \frac{3}{4},$$

$$ID = \sqrt{\frac{1}{4}+1+1} = \frac{3}{2},\qquad IB = \sqrt{\frac{1}{4}+0+1} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Comme $\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IB} = ID\times IB\times\cos\left(\widehat{DIB}\right)$:

$$\cos\left(\widehat{DIB}\right) = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3\sqrt{5}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{5}}.$$

Exercice 3

4 points

8. **Réponse A.** $A\in\mathcal{D}$: $z=0$ convient ; $-6a+6=0 \iff a=1$, et alors $y=4-9=-5$: c'est bien A.
$A\in\mathcal{P}$: $3\times 0-2\times(-5)-10=0$. Le point A appartient à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{P}$.

9. **Réponse D.** $\overrightarrow{AB}(1\,;\,5\,;\,1)$, $\overrightarrow{AC}(-1\,;\,-2\,;\,0)$, $\overrightarrow{BC}(-2\,;\,-7\,;\,-1)$. Dans le repère orthonormé :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -1-10+0 = -11,\quad \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 2+35+1 = 38,\quad \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = 2+14+0 = 16.$$

Aucun de ces produits scalaires n'est nul : le triangle ABC n'est rectangle en aucun de ses sommets.

10. **Réponse C.** Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{u}(-6\,;\,4\,;\,0)$ et un vecteur normal de $\mathcal{P}$ est $\vec{n}(3\,;\,-2\,;\,0)$. Or $\vec{u} = -2\,\vec{n}$: le vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est normal au plan, donc $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont perpendiculaires (ils se coupent en A).

11. (Bonus) Réponse B. Les droites (AB) et $\mathcal{D}$ passent toutes deux par A. Leurs vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}(1\,;\,5\,;\,1)$ et $\vec{u}(-6\,;\,4\,;\,0)$ ne sont pas colinéaires (3e coordonnée), donc les droites sont sécantes en A. Enfin

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u} = -6+20+0 = 14 \neq 0,$$

donc elles ne sont pas perpendiculaires.

Exercice 4

7 points

12. Réponse A. $g(1) = 1+2-3 = 0$. Pour $x>0$, $g'(x) = 2x+2+\dfrac{3}{x^2}$, donc $g'(1) = 2+2+3 = 7$. La tangente a pour équation $y = g'(1)(x-1)+g(1)$, soit

$$\boxed{y = 7(x-1)}.$$

13. Réponse B. Forme indéterminée « $+\infty-\infty$ » : on factorise par x pour $x>0$:

$$f(x) = x\left(3\,\frac{\mathrm{e}^x}{x}-1\right).$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, donc la parenthèse tend vers $+\infty$ et, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$.

14. Réponse C. $f'(x) = 3x^2-78x+315 = 3(x-5)(x-21)$ et $f''(x) = 6x-78 = 6(x-13)$.

- $f''(x)<0$ sur $[0\,;\,13[$ et $f''(x)>0$ sur $]13\,;\,30]$: f est concave sur $[0\,;\,13]$ et convexe sur $[13\,;\,30]$, donc A et B sont fausses (f n'est pas concave sur $[13\,;\,21]$).
- f'' change de signe en 13 : $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion d'abscisse 13.
- $f''<0$ sur $[0\,;\,5]$: f' y est décroissante, donc D est fausse.

15. Réponse B. Pour $n\geqslant 1$, on factorise par n ; comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{n} = 0$:

$$v_n = \frac{3n}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \frac{3}{1+\frac{2}{n}}, \qquad \lim_{n\to+\infty} v_n = \boxed{3}.$$

16. Réponse B. Si (u_n) est croissante, alors pour tout n, $v_n\geqslant u_n\geqslant u_0$: (v_n) est minorée par u_0.
Les autres affirmations sont fausses : avec $u_n=1$, $w_n=3$ et $v_n = 2+\frac{(-1)^n}{2}$, la suite (v_n) diverge (A fausse) ; avec $v_n=2$, elle converge (D fausse) ; avec $u_n=v_n=1-\frac{1}{n+1}$ et $w_n=3$, on a $v_0 = 0<1$ (C fausse).

17. (Bonus) Réponse B. Pour tout $n\geqslant 1$, $u_n\leqslant u_{n+1}$: la suite est croissante (à partir du rang 1). De plus $u_{n+1}\leqslant\frac{1}{n}\leqslant 1$: elle est majorée par 1. Par convergence monotone, (u_n) converge.
La limite n'est pas forcément 0 : la suite constante $u_n=-1$ vérifie l'hypothèse et converge vers -1 (C et D fausses).

18. (Bonus) Réponse B. Pour tout n, $u_{n+1}>n+1>u_n$: la suite (u_n) est strictement croissante.
A est fausse ($N<u_N<N+1$). Comme $u_n>n$, par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$: C et D sont fausses.