Exercice 1

4 points

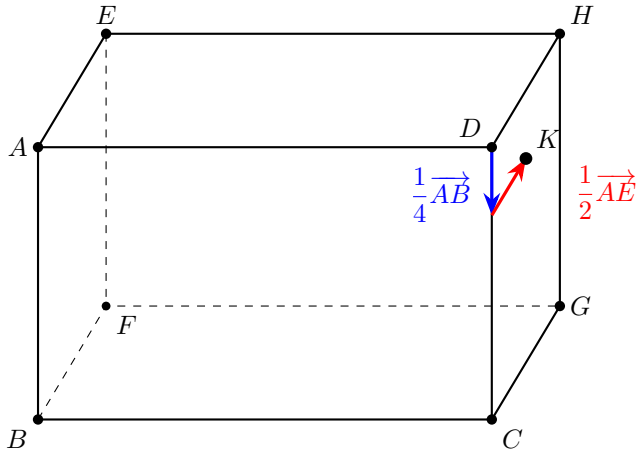
1) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont portés par deux côtés consécutifs du rectangle $ABCD$: ils ne sont pas colinéaires et dirigent le plan (ABD).
Le vecteur $\overrightarrow{AE}$ est porté par l'arête $[AE]$, perpendiculaire à la face $ABCD$ (parallélépipède rectangle) : le point E n'appartient pas au plan (ABD), donc $\overrightarrow{AE}$ ne s'écrit pas comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
Les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ ne sont donc pas coplanaires :

$$\boxed{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right) \text{ est une base de l'espace.}}$$

2) On part de A, on se déplace de $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, puis de $\overrightarrow{AD}$, puis de $\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$. Comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DH}$ (faces rectangulaires) :

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DH}, \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DH}.$$

Le point K est donc dans la face $DCGH$: à partir de D, au quart de $[DC]$ vers C, puis à mi-hauteur de la face vers H.



3) **Vecteur $\overrightarrow{OI}$.** O est le centre du rectangle $ADHE$, donc le milieu de sa diagonale $[AH]$:

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}.$$

I est le milieu de $[AB]$, donc $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Par la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

$$\boxed{\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}}.$$

Vecteur $\overrightarrow{BJ}$. Par la relation de Chasles, avec $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HJ} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB},$$

$$\boxed{\overrightarrow{BJ} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}}.$$

Exercice 2

4 points

1) Dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$, on a $\overrightarrow{AB} = 1\,\overrightarrow{AB} + 0\,\overrightarrow{AC} + 0\,\overrightarrow{AD}$, d'où $B(1\,;\,0\,;\,0)$, et de même pour C et D.

I, J, K sont les milieux de $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$: leurs coordonnées sont les moyennes de celles des extrémités. L est le milieu de $[JK]$: $x_L = \dfrac{0+0}{2} = 0$, $y_L = \dfrac{\frac{1}{2}+0}{2} = \dfrac{1}{4}$, $z_L = \dfrac{0+\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{4}$.

$$\boxed{B(1\,;\,0\,;\,0)},\ \boxed{C(0\,;\,1\,;\,0)},\ \boxed{D(0\,;\,0\,;\,1)},$$

$$\boxed{I\left(\tfrac{1}{2}\,;\,0\,;\,0\right)},\ \boxed{J\left(0\,;\,\tfrac{1}{2}\,;\,0\right)},\ \boxed{K\left(0\,;\,0\,;\,\tfrac{1}{2}\right)},\ \boxed{L\left(0\,;\,\tfrac{1}{4}\,;\,\tfrac{1}{4}\right)}.$$

2)

$$\overrightarrow{IL}\begin{pmatrix}0-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}-0\\ \frac{1}{4}-0\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}},\qquad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0-1\\ 1-0\\ 0-0\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}},\qquad \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0-0\\ 0-1\\ 1-0\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 1\end{pmatrix}}.$$

3) $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires (la 3e coordonnée de $\overrightarrow{BC}$ est nulle mais pas celle de $\overrightarrow{CD}$, alors que la 1re de $\overrightarrow{BC}$ est non nulle et celle de $\overrightarrow{CD}$ nulle).

Les trois vecteurs sont coplanaires si et seulement s'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{IL} = a\,\overrightarrow{BC} + b\,\overrightarrow{CD}$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} = -a \\ \frac{1}{4} = a - b \\ \frac{1}{4} = b \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \text{ (vrai)} \end{cases}$$

Le système admet une solution : $\overrightarrow{IL} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{CD}$, donc

$$\boxed{\text{les vecteurs } \overrightarrow{IL},\ \overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ sont coplanaires.}}$$

Exercice 3

5,5 points

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-2\\2-0\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0-2\\0-0\\3-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$.

S'il existait un réel λ tel que $\overrightarrow{AC}=\lambda\,\overrightarrow{AB}$, la 3e coordonnée donnerait $3=\lambda\times 0=0$: impossible.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc

$$\boxed{\text{les points } A, B \text{ et } C \text{ ne sont pas alignés.}}$$

2) **a.** $A\in d$ si et seulement s'il existe un réel r tel que

$$\begin{cases}2=-3r\\0=2+r\\0=3r\end{cases}\iff\begin{cases}r=-\frac{2}{3}\\r=-2\\r=0\end{cases}$$

Les valeurs obtenues sont différentes : le système n'a pas de solution, donc

$$\boxed{A\notin d.}$$

$B\in d$ si et seulement s'il existe un réel r tel que

$$\begin{cases}0=-3r\\2=2+r\\0=3r\end{cases}\iff r=0.$$

Le système a une solution ($r=0$), donc

$$\boxed{B\in d.}$$

b. On cherche deux réels a et b tels que $\vec{u}=a\,\overrightarrow{AB}+b\,\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{cases}-3=-2a-2b\\1=2a\\3=3b\end{cases}\iff\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=1\\-3=-1-2\text{ (vrai)}\end{cases}$$

Donc $\vec{u}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$:

$$\boxed{\text{les vecteurs } \vec{u},\ \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont coplanaires.}}$$

c. D'après la représentation paramétrique, $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d. D'après la question **b.**, il s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, qui dirigent le plan (ABC) : la droite d est donc parallèle au plan (ABC).
De plus, d'après la question **a.**, $B\in d$ et $B\in(ABC)$. Une droite parallèle à un plan et ayant un point commun avec lui est contenue dans ce plan :

$$d\subset(ABC),\quad\text{donc}\quad\boxed{(ABC)\cap d=d}.$$

L'intersection est la droite d tout entière (et non un point).

Exercice 4

6,5 points

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-1\\2-(-1)\\4-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$. La droite d passe par $E(-5\,;\,7\,;\,1)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$:

$$d:\boxed{\begin{cases}x=-5+2t\\y=7+3t\\z=1+t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}}.$$

2) $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}3-1\\-15-(-1)\\3-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-14\\0\end{pmatrix}$. S'il existait un réel λ tel que $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AB}$, la 3e coordonnée donnerait $\lambda=0$, puis la 1re $2=0$: impossible.
Les vecteurs directeurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires, donc

$$\boxed{\text{les droites } (AF) \text{ et } d \text{ ne sont pas parallèles.}}$$

3) La représentation proposée est celle de la droite passant par le point de paramètre $k=0$, soit $(1\,;\,-1\,;\,3)=A$, et dirigée par $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\7\\0\end{pmatrix}$.

Or $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}2\\-14\\0\end{pmatrix}=-2\,\vec{v}$: $\vec{v}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AF}$, c'est un vecteur directeur de (AF). (On vérifie aussi que $k=-2$ donne $(3\,;\,-15\,;\,3)=F$.)

$$\boxed{\text{C'est bien une représentation paramétrique de la droite } (AF).}$$

4) Un point commun aux deux droites correspond à des paramètres t et k tels que

$$\begin{cases}-5+2t=-k+1\\7+3t=7k-1\\1+t=3\end{cases}\iff\begin{cases}t=2\\-1=-k+1\\13=7k-1\end{cases}\iff\begin{cases}t=2\\k=2\\k=2\end{cases}$$

Les deux premières équations donnent la même valeur de k : le système a une unique solution $t=2$, $k=2$. Les droites sont donc sécantes; avec $t=2$ dans la représentation de d : $x=-5+4=-1$, $y=7+6=13$, $z=1+2=3$.

Le point d'intersection est $\boxed{(-1\,;\,13\,;\,3)}$.