Exercice 1

6 points

On vérifie chaque fois que la dérivée de la primitive proposée redonne la fonction.

1) Sur $]0\,;+\infty[$, une primitive de x est $\dfrac{x^2}{2}$, de 1 est x et de $\dfrac{1}{x}$ est $\ln x$. Donc

$$\boxed{F(x) = \frac{5}{2}x^2 + x + 4\ln x}.$$

2) Sur $]0\,;+\infty[$, une primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est $2\sqrt{x}$ (car $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$), une primitive de x^3 est $\dfrac{x^4}{4}$ et de x^2 est $\dfrac{x^3}{3}$. Donc

$$G(x) = 3 \times 2\sqrt{x} - \frac{x^4}{4} + 6 \times \frac{x^3}{3}, \qquad \boxed{G(x) = 6\sqrt{x} - \frac{x^4}{4} + 2x^3}.$$

3) h est de la forme $u'u^4$ avec $u(x) = x^3 + 2$ et $u'(x) = 3x^2$.
Une primitive de $u'u^n$ est $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$, donc

$$\boxed{H(x) = \frac{\left(x^3+2\right)^5}{5}}.$$

4) Avec $u(x) = x^3 - 3$, $u'(x) = 3x^2$, donc $k(x) = \dfrac{1}{3} \times 3x^2\mathrm{e}^{x^3-3} = \dfrac{1}{3}\,u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.
Une primitive de $u'\mathrm{e}^u$ est e^u, donc

$$\boxed{K(x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3-3}}.$$

Exercice 2

8 points

Partie I

1) Pour $x > 0$:

$$f(x) = 0 \iff 2\ln x - 1 = 0 \iff \ln x = \frac{1}{2} \iff x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}.$$

Donc $\boxed{\alpha = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}} \approx 1{,}65}$.

2) Par lecture graphique, la courbe est sous l'axe des abscisses avant α et au-dessus après :

$$\boxed{f(x) < 0 \text{ sur }]0\,;\alpha[, \quad f(\alpha) = 0, \quad f(x) > 0 \text{ sur }]\alpha\,;+\infty[}.$$

(On le retrouve par le calcul : $x > 0$, donc $f(x)$ a le signe de $2\ln x - 1$, positif si et seulement si $x > \sqrt{\mathrm{e}}$.)

Partie II

1) **a.** On écrit $g(x) = \ln x\,(\ln x - 1)$.
$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} (\ln x - 1) = -\infty$ et, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty}$.

b. $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln x - 1) = +\infty$ et, par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty}$.

2) g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$. Avec $\left(u^2\right)' = 2u'u$ et $u = \ln$:

$$g'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x - \frac{1}{x} = \frac{2\ln x - 1}{x}, \qquad \text{donc} \qquad \boxed{g'(x) = f(x)}.$$

3) D'après la partie I, $g'(x) = f(x)$ est négatif sur $]0\,;\sqrt{\mathrm{e}}]$ et positif sur $[\sqrt{\mathrm{e}}\,;+\infty[$.
$g\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$.

x	0		$\sqrt{\mathrm{e}}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
g	‖ $+\infty$	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	$+\infty$

4) Soit $m > -0{,}25$.

- Sur $]0\,;\sqrt{\mathrm{e}}]$, g est continue (car dérivable) et strictement décroissante ; $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$ et $g\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = -0{,}25$. Comme $m \in]-0{,}25\,;+\infty[$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = m$ admet une unique solution sur $]0\,;\sqrt{\mathrm{e}}]$.

- Sur $[\sqrt{\mathrm{e}}\,;+\infty[$, g est continue et strictement croissante ; $g\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = -0{,}25$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$. De même, l'équation $g(x) = m$ admet une unique solution sur cet intervalle.

Ces deux solutions sont distinctes car $g\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = -0{,}25 \neq m$. L'équation $g(x) = m$ admet donc exactement deux solutions sur $]0\,;+\infty[$.

5) Pour $x > 0$:

$$g(x) = 0 \iff \ln x\,(\ln x - 1) = 0 \iff \ln x = 0 \text{ ou } \ln x = 1 \iff x = 1 \text{ ou } x = \mathrm{e}.$$

Les deux solutions sont $\boxed{x = 1 \text{ et } x = \mathrm{e}}$ (cas $m = 0 > -0{,}25$ de la question précédente).

Exercice 3

6 points

1. $\ln 16 + 2\ln 3 - \ln 24 = \ln\left(\dfrac{16 \times 3^2}{24}\right) = \ln\left(\dfrac{144}{24}\right) = \ln 6$. Réponse **c)**.

2. *Domaine* : il faut $3x^2 - x - 2 > 0$ et $6x + 4 > 0$. Or $3x^2 - x - 2 = (x-1)(3x+2)$ est strictement positif à l'extérieur des racines $-\dfrac{2}{3}$ et 1, et $6x + 4 > 0 \iff x > -\dfrac{2}{3}$: l'inéquation est définie sur $]1\,;+\infty[$.
Sur cet intervalle, la fonction $\ln$ étant strictement croissante :

$$\begin{aligned}\ln\left(3x^2 - x - 2\right) > \ln(6x+4) &\iff 3x^2 - x - 2 > 6x + 4\\ &\iff 3x^2 - 7x - 6 > 0 \iff (x-3)(3x+2) > 0.\end{aligned}$$

Sur $]1\,;+\infty[$, $3x+2>0$, donc cela équivaut à $x > 3$. L'ensemble des solutions est $]3\,;+\infty[$: 3 est exclu, donc aucune des propositions a), b), c) ne convient. Réponse **d)**.

3. $4x^2 - 3\ln x = x^2\left(4 - 3\dfrac{\ln x}{x^2}\right)$. Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$, donc la parenthèse tend vers 4 et, par produit, la limite est $+\infty$. Réponse **b)**.

4. La fonction $\ln$ étant strictement croissante :

$$\left(\frac{7}{9}\right)^n \leqslant 10^{-6} \iff n\ln\left(\frac{7}{9}\right) \leqslant \ln\left(10^{-6}\right) \iff n \geqslant \frac{\ln\left(10^{-6}\right)}{\ln\left(\frac{7}{9}\right)},$$

en divisant par $\ln\left(\dfrac{7}{9}\right) < 0$. Or $\dfrac{\ln\left(10^{-6}\right)}{\ln\left(\frac{7}{9}\right)} \approx 54{,}97$ et n est entier, donc $n \geqslant 55$. Réponse **c)**.

5. $f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$. Réponse **d)**.

6. Pour $f(x) = \dfrac{\ln\left(x^4+2\right)}{4}$: $f'(x) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{4x^3}{x^4+2} = \dfrac{x^3}{x^4+2}$ (avec $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, $u(x) = x^4 + 2 > 0$).
Réponse **c)**.
(Les autres propositions donnent $\dfrac{4x^3}{x^4+2}$, $\dfrac{16x^3}{x^4+2}$ et $\dfrac{4x^3}{3(x^4+2)}$.)